



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Departamento de Computación

Índice Cromático para Gráficas Geométricas Completas

TESIS QUE PRESENTA

Constantino Matias Salvador

PARA OBTENER EL GRADO DE

**Maestro en Ciencias
en Computación**

DIRECTORA DE TESIS

Dra. María Dolores Lara Cuevas

MÉXICO, D.F.

OCTUBRE 9, DE 2015

Agradecimientos

A mis Padres, por apoyarme siempre.

A la doctora Dolores, por la confianza y el gran apoyo.

A Conacyt.

Dedicatoria

A mis padres: Felipa y Constantino
A mis siete hermanas y hermano

Índice general

Agradecimientos	I
Dedicatoria	III
Resumen	IX
Abstract	XI
1. Introducción	1
2. Antecedentes	3
2.1. Gráficas	3
2.2. Coloraciones	6
2.3. Gráficas geométricas	10
2.4. Coloraciones en gráficas geométricas	14
3. Estado del arte	15
4. Gráficas completas en posición convexa	21
4.1. Gráficas bipartitas completas	21
4.1.1. Índice cromático de gráficas alternantes y gráficas se- parables por una recta	21
4.1.2. Cota superior	23
4.1.3. Cota inferior	24
4.2. Gráficas completas en posición convexa	27
4.2.1. Cota inferior	27
4.2.2. Cota superior	28
4.3. Casos particulares en posición general	30
4.3.1. Doble cadena convexa	30
4.3.2. Doble círculo convexo	34

5. Gráficas completas en posición general	39
5.1. Gráfica de disyunción	39
5.1.1. Cota inferior	39
5.1.2. Cota superior	53
5.2. Gráfica de intersección	55
5.2.1. Algoritmo 1	56
5.2.2. Algoritmo 2	57
5.2.3. Resultados	59
5.2.4. Cota inferior para χ_g cuando n es par	61
6. Conclusiones y trabajo futuro	67

Índice de figuras

2.1. Gráfica de orden 4	4
2.2. Gráfica G con dos subgráficas, sólo G_1 es inducida	4
2.3. Gráfica G con dos componentes, G_1 es un camino y G_2 es un ciclo	5
2.4. Gráficas Bipartitas	6
2.5. Dos coloraciones de la gráfica G , únicamente C_2 es una coloración propia	7
2.6. Dos coloraciones de aristas de la gráfica G , únicamente C_2 es una coloración propia	8
2.7. Gráficas planas, G_1 es 4-coloreables y G_2 es 3-coloreables	9
2.8. Dibujos de la gráfica (abstracta) K_5 , solamente G_1 y G_2 son gráficas geométricas	10
2.9. Aristas adyacentes	11
2.10. Ejemplo de <i>thrackle</i> de una gráfica geométrica, donde $T(G_1)$ es un <i>thrackle</i> maximal	12
2.11. Ejemplo de conjuntos de puntos en posición convexa y general	12
2.12. Ejemplo de gráfica bipartita y concepto de cúmulos	13
2.13. Tipos particulares de gráficas bipartitas	13
2.14. Gráficas de orden 4, dibujadas sobre conjuntos distintos	14
3.1. (a) Vértice punteado; (b) Argumento de Perles.	16
3.2. Gráficas $I(S)$ y $D(S)$ de un conjunto S de puntos en el plano	18
4.1. Ejemplo de una gráfica alternante $G_{r,b}$ y el polígono usado para colorearla con r colores	22
4.2. <i>Thrackle</i> de una gráfica separable por una recta y construcción de una coloración para la misma	23
4.3. <i>Coloración que usa $n - k$ colores para la gráfica $G_{r,b}$ con k cúmulos de una misma clase</i>	25

4.4. <i>Thrackle</i> de la gráfica $G_{r,b}$, con k cúmulos de misma clase, y gráficas G_i	26
4.5. <i>Thrackle</i> de la gráfica G_n , con $n = 5$	28
4.6. Tres casos de la coloración propia para G_n , con $n = 5$	29
4.7. Dos aristas con el mismo color son necesariamente paralelas	29
4.8. Conjunto de tipo doble cadena convexa	30
4.9. Ejemplo de clases cromáticas para una coloración de G	32
4.10. Ejemplo de clases cromáticas para una coloración de G	33
4.11. Doble círculo convexo	34
4.12. <i>Thrackle</i> de una gráfica doble círculo convexo	35
4.13. Coloración para doble círculo convexo	36
4.14. Coloración para doble círculo convexo, con $i = 1$	37
5.1. <i>Thrackle</i> T y su ciclo impar $C(T)$	40
5.2. Casos para demostrar que n no puede ser par	41
5.3. <i>Thrackle</i> maximal T , con n aristas, y concepto de cuña $W_T(p)$	42
5.4. Dos <i>thrackles</i> maximales T y T_1 que comparten una arista	43
5.5. Dos <i>thrackles</i> maximales T_1 y T_2 que comparten una arista	44
5.6. Conjuntos I_i , D_i y R_i de una cuña W_i	46
5.7. Etiquetación de las cuñas de $C(T)$	46
5.8. Conjuntos I , D y R de una cuña W_1	47
5.9. Caso general donde dos cuñas comparten una arista	48
5.10. Cuñas que comparten al menos dos aristas	50
5.11. Cuñas que comparten al menos dos aristas	51
5.12. Instancias de gráficas $D(S)$ coloreadas con $n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor$ colores	54
5.13. Gráficas $D(S)$ de orden $n = 32$ coloreada con 25 colores	55
5.14. Algoritmo 1	57
5.15. Algoritmo 2	58
5.16. Ejemplo de cada familia de gráficas geométricas para $n = 3$ con $\chi_1(G) = 3$	59
5.17. Ejemplo de cada familia de gráficas geométricas para $n = 4$ con $\chi_1(G) = 4$	60
5.18. Ejemplo de cada familia de gráficas geométricas para $n = 5$ con $\chi_1(G) = 5$	61
5.19. Ejemplos de familias de gráficas geométricas para $n = 6$ con $\chi_1(G) = 6$	64
5.20. Familias de gráficas geométricas para $n = 6$ con $\chi_1(G) = 7$ y $\chi_1(G) = 5$	65
5.21. Clases cromáticas de tamaño $n/2 - 1$	66

Resumen

Una gráfica representada en el plano con puntos como vértices y segmentos de recta como aristas, es denominada *gráfica geométrica*. En este trabajo dar una *coloración propia* a las aristas de una gráfica consiste en asignar a cada arista un color, de tal manera que dos aristas que inciden en un mismo vértice o se cruzan no tengan el mismo color ¹. El problema central que estudiamos es el de hallar el mínimo número de colores necesarios para dar una coloración propia a una gráfica geométrica, a este valor lo denominamos *índice cromático* de la gráfica.

En este trabajo damos una cota inferior y una cota superior para el índice cromático de gráficas bipartitas dibujadas sobre conjuntos de puntos en posición convexa. Para gráficas no bipartitas dibujadas sobre este mismo tipo de conjuntos, determinamos el valor exacto del índice cromático. Para gráficas determinadas por ciertos tipo de conjuntos de puntos clásicos en la literatura de geometría combinatoria (*doble cadena convexa* y *doble círculo convexo*) determinamos el valor exacto del índice cromático. Si consideramos la gráfica en la que dos aristas son disjuntas si inciden en un mismo vértice o se cruzan, entonces el problema de determinar el índice cromático es distinto. Para este tipo de gráficas dibujadas sobre puntos en posición general mejoramos la cota inferior y la cota superior para el índice cromático. Mediante búsquedas exhaustivas hallamos el valor exacto del índice cromático de todas las posibles gráficas geométricas de orden 3, 4, 5 y 6. Adicionalmente mejoramos la cota inferior para el *índice cromático geométrico* de gráficas de intersección de orden par.

Palabras clave: *Índice Cromático, Gráfica Geométrica, Coloración propia, Índice Cromático Geométrico*

¹Esta condición de cruce hace que este problema sea totalmente distinto al problema de coloración en gráficas (abstractas).

Abstract

A *geometric graph* is a graph drawn in the plane, in such a way that the vertices correspond to a point set and the edges are represented by straight-line segments. A *proper coloring* is an assignment of colors to the edges of the graph so that no two incident or crossing edges have the same color ². We study the problem of finding, for a geometric graph G , the minimum number of different colors required to give a proper coloring of G , we call this value *chromatic index* of G .

In this work we give to the edges lower bounds and upper bound for the chromatic index of bipartite geometric graphs whose vertex set consists of points in convex position. For complete geometric graphs whose vertex set consists of points in convex position, we obtain the exact value of the chromatic index. Similarly, we obtain the exact value of the chromatic index for graphs with vertex set consisting of certain types of points sets well known in combinatorial geometry (convex chain and double circle). we consider the graph in which two edges are disjoint if and only if they are adjacent or they cross, for this type of graph we improve the lower and upper bound for the chromatic index. Computationally we find the exact value of the chromatic index for intersection graphs of order 3, 4, 5 and 6. We improve the lower bound of the *geometric chromatic index* for intersection graphs of even order.

Keywords: *Chromatic Index, Geometric Graph, Proper Coloring, Geometric Chromatic Index*

²Due to this condition this problem and the classic problem of coloring (abstract) graphs are different.

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de Gráficas es ampliamente utilizada para modelar algunos problemas computacionales, tales como: el problema del agente viajero, coloración de mapas, etc. La teoría de gráficas trabaja con objetos denominados gráficas, las cuales se definen como un conjunto de vértices y un conjunto de aristas que relacionan pares de vértices. Una gráfica representada en el plano por puntos como vértices y segmentos de rectas como aristas la denominamos *gráfica geométrica*. Según la naturaleza del problema a resolver se estudian distintas propiedades de dichas gráficas; por ejemplo, el problema del agente viajero se puede resolver encontrando el camino de longitud mínima en una gráfica, el problema de coloración de mapas (con ciertas restricciones) corresponde al problema de hallar una *coloración* para los vértices de una gráfica, donde la coloración buscada consiste en asignar a cada vértice un color (que bien podría ser un número entero) teniendo como condición que dos vértices que están conectados por una arista no pueden tener el mismo color asignado. Este problema ha sido ampliamente estudiado desde hace ya tiempo, hoy sabemos que cuatro colores son suficientes para colorear un mapa en el plano, el famoso teorema de los cuatro colores. Sobre este mismo tipo de problemas, este trabajo se centra en saber qué tantos colores son necesarios y suficientes, para colorear las aristas de una gráfica geométrica, a este valor lo denominamos *índice cromático* de la gráfica y lo denotamos por χ_1 . En este tipo de coloraciones, si una arista (al ser un segmento de recta) cruza a otra arista se consideran adyacentes, por lo que ambas no podrán tener el mismo color. Al considerar la propiedad de cruce entre aristas, los problemas de colorear una gráfica y colorear una gráfica geométrica son totalmente distintos, pues en una gráfica el concepto de cruce entre aristas simplemente no existe.

Generalmente no es sencillo hallar el valor exacto del índice cromático para una familia de gráficas geométricas, en estos casos lo que se hace es acotar inferior y superiormente dicho número. La cota inferior generalmente se obtiene hallando un conjunto de aristas tales que se crucen dos a dos, el tamaño de esta estructura acota inferiormente al índice cromático, pues cada arista en ella deben tener un color distinto a todas la demás, pues todas son adyacentes entre sí. La cota superior para índice cromático en la mayoría de los casos se obtiene proporcionando una coloración que use a lo más k colores, de tal forma que $\chi_1 \leq k$. Evidentemente cuando la cota inferior es igual a la cota superior se conoce el valor exacto del índice cromático de la gráfica.

Como ya mencionamos, esta tesis se centra en el estudio del índice cromático de gráficas geométricas, para ello en el capítulo 2 proporcionamos los conceptos básicos relacionados con gráficas, coloraciones de gráficas, e índice cromático, se enuncian también algunos teoremas clásicos en esta rama. En el capítulo 3 citamos algunos de los trabajos más relevantes en los que se han estudiado algunas propiedades de las gráficas geométricas y específicamente el índice cromático de gráficas geométricas, además citamos teoremas sobre conjuntos finitos de puntos en el plano los cuales son de suma utilidad en el estudio de gráficas geométricas. En el capítulo 4 proporcionamos una cota inferior y una cota superior para el índice cromático de gráficas bipartitas, dibujadas sobre conjuntos de puntos en posición convexa, así como para gráficas no bipartitas dibujadas sobre conjuntos de puntos en posición convexa. Además, determinamos el valor exacto del índice cromático para las gráficas *doble cadena convexa* y *doble círculo convexo*. El capítulo 5 está dedicado al estudio de gráficas geométricas dibujadas sobre conjuntos de puntos en posición general, en la sección 6.1 proporcionamos una cota inferior y una cota superior para el índice cromático de gráficas $D(S)$, llamadas gráficas de disyunción, que son un caso particular de las gráficas de Kneser, dibujadas sobre conjuntos puntos en posición general. En la sección 5.2 proporcionamos el valor exacto del índice cromático de todas las posibles gráficas geométricas de orden 3, 4, 5 y 6; esto con base en resultados experimentales. Además, mejoramos la cota inferior para el *índice cromático geométrico* de gráficas de orden par.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo definimos los conceptos y la notación utilizados en el desarrollo de esta tesis. Empezamos por definir, en la sección 2.1, algunos conceptos de la teoría clásica de gráficas. Luego, en la sección 2.2 enunciamos algunos resultados básicos sobre gráficas. Posteriormente, en la sección 2.3 definimos gráficas geométricas. Finalmente, en la sección 2.4 definimos el concepto de coloración de gráficas geométricas, así como el de índice cromático de las mismas.

2.1. Gráficas

Una *gráfica* G consiste de un par de conjuntos (V, E) . V es un conjunto finito y no vacío, y $E \subseteq V \times V$. Para indicar que V es el conjunto de vértices de una gráfica G utilizamos la notación $V(G)$ y para el caso de las aristas utilizamos $E(G)$. El número de elementos en $V(G)$ es el *orden* de G , en la figura 2.1 mostramos un ejemplo de una gráfica de orden cuatro. Se dice que dos vértices u y v son *adyacentes* si existe la arista $uv \in E$; así, en la gráfica de la figura 2.1 los vértices v_1 y v_3 son adyacentes, no así v_2 y v_4 . De manera similar, dos aristas son *adyacentes* si tienen un vértice en común, por ejemplo, en la gráfica de la misma figura e_1 y e_2 son adyacentes, mientras que e_2 y e_5 no lo son.

Decimos que un subconjunto V' de vértices (o aristas) de G es un *conjunto independiente*, si no hay dos elementos en V' que sean adyacentes en G . En la figura 2.1 e_1 y e_4 son independientes.

Una gráfica G es *completa* si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G)$ existe la arista $e_{u,v} \in E(G)$. Toda gráfica completa tiene $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ aristas. Por ejemplo, en la figura 2.2 la gráfica G_1 es completa, mientras que

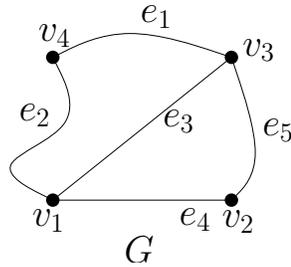


Figura 2.1: Gráfica de orden 4

G y G_2 no lo son.

Definimos la unión de dos gráficas G y G' como : $G \cup G' =: (V(G) \cup V(G'), E(G) \cup E(G'))$; mientras que la intersección es $G \cap G' =: (V(G) \cap V(G'), E(G) \cap E(G'))$. Si $V(G') \subseteq V(G)$ y $E(G') \subseteq E(G)$, entonces decimos que G' es una *subgráfica* de G , y la representamos como $G' \subseteq G$. Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $e_{x,y} \in E(G)$ con $x, y \in V(G')$, entonces G' es una *gráfica inducida* de G y la denotamos como $G' = G[V(G')]$, por ejemplo, en la figura 2.2 mostramos la gráfica G y dos subgráficas de G , de las cuales sólo G_1 es inducida. Decimos que G' es una *subgráfica generadora* si $G' \subseteq G$ y $V(G') = V(G)$, en la figura 2.2 sólo G_2 es generadora de G . El *complemento* \bar{G} de una gráfica G es una gráfica tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ y $E(\bar{G}) = V(G) \times V(G) - E(G)$.

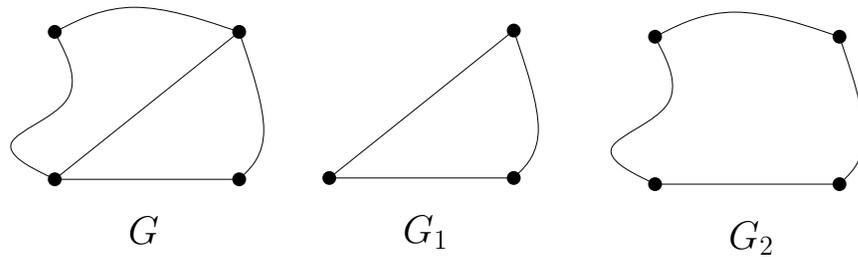


Figura 2.2: Gráfica G con dos subgráficas, sólo G_1 es inducida

El *grado* de un vértice v de G es el número de aristas que inciden en él, y lo denotamos por $d(v)$. El máximo grado de los vértices de G lo denotamos por $\Delta(G)$ mientras que el mínimo por $\delta(G)$, como ejemplo, en la gráfica de la figura 2.1 tenemos $d(v_2) = 2$, $\Delta(G) = 3$ y $\delta(G) = 2$.

El siguiente teorema enuncia la relación que hay entre $\Delta(G)$ y el número de aristas.

Teorema 1 Si G es una gráfica con $m = |E(G)|$, entonces

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Prueba. ([2]) Si se suman los grados de cada vértice de G , entonces cada arista se habrá contado dos veces, una vez por cada vértice en el que incide. \square

Como corolario del teorema anterior tenemos que toda gráfica tiene un número par de vértices de grado impar.

Un *camino* que conecta los vértices u y v en G es una secuencia de vértices W que empieza en u y termina en v , tal que dos vértices consecutivos en W son adyacentes en G , en la figura 2.3 la gráfica G_1 es un camino que va de v_4 a v_2 . Si $u = v$ decimos que W es un *ciclo*, por ejemplo, en la figura 2.3 G_2 es un ciclo de tamaño tres. Una gráfica G es *conexa* si para cualesquiera dos vértices u, v de G existe un camino P en G que los conecta. Una subgráfica conexa de tamaño máximo de G es llamada *componente* de G , en la figura 2.3 mostramos la gráfica G con sus dos componentes G_1 y G_2 , notemos que G no es conexa mientras que cada una de sus componentes sí lo es.

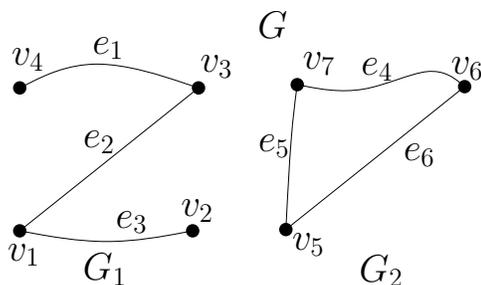


Figura 2.3: Gráfica G con dos componentes, G_1 es un camino y G_2 es un ciclo

Una gráfica $G_{r,b}$ es *bipartita* si es posible partir su conjunto de vértices $V(G_{r,b})$ en dos subconjuntos R y B , tales que $V(G_{r,b}) = R \cup B$ y $R \cap B = \emptyset$, y cada arista de $G_{r,b}$ une un vértice de R con un vértice de B . R y B son llamados clases de $G_{r,b}$, en la figura 2.4 mostramos dos ejemplos de dichas gráficas.

Definimos la *gráfica de líneas* $L(G)$ de una gráfica G como la gráfica en la que cada vértice de $L(G)$ representa a una arista de G , y dos vértices p y q son adyacentes en $L(G)$, si las aristas que representan son adyacentes en G .

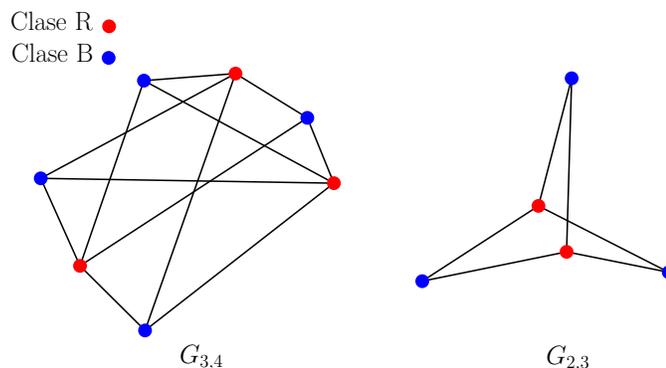


Figura 2.4: Gráficas Bipartitas

Decimos que G es una *gráfica plana* si cumple con las siguientes propiedades:

- (i) $V(G) \subseteq \mathbb{R}^2$
- (ii) Sus aristas son curvas que unen dos puntos de $V(G)$.
- (iii) Diferentes aristas tienen pares distintos de extremos
- (iv) El interior de una arista no contiene vértices ni puntos de otras aristas

Una gráfica G es *aplanable* si puede ser dibujada en el plano como una gráfica plana.

2.2. Coloraciones

Una k -coloración de los vértices de G es una función suprayectiva $f : V(G) \rightarrow C$, donde C es el conjunto de enteros $\{1, 2, 3, \dots, k\}$. Podemos ver al conjunto C como un conjunto de k -colores distintos. Una coloración es *propia* si para cualesquiera dos vértices adyacentes p y p' se tiene que $f(p) \neq f(p')$. Por ejemplo, en la figura 2.5 mostramos dos coloraciones distintas para una misma gráfica. La coloración C_1 no es propia debido a que los vértices v_2 y v_3 tienen asignado un mismo color y son adyacentes, mientras que la coloración C_2 es propia porque no hay en ella dos vértices adyacentes que tengan asignado el mismo color.

Sea V_i el conjunto de vértices de G coloreados con el color i con $1 \leq i \leq k$, entonces V_i es llamado una *clase cromática* (notemos que cada clase cromática de G es un conjunto independiente de vértices de G). En la figura 2.5 en

la coloración C_1 los vértices v_2 y v_3 conforman la clase cromática azul, v_1 la clase cromática verde y v_4 la clase cromática roja, por tanto, C_1 tiene tres clases cromáticas.

Sea k el mínimo entero, tal que la gráfica G tiene una coloración propia que usa k -colores distintos, decimos que k es el *número cromático* de G y lo denotamos como $\chi(G)$. Este entero siempre existe, dado que siempre es posible dar una coloración trivial que asigna a cada arista de G un color distinto, entonces el número cromático está acotado por:

$$1 \leq \chi(G) \leq n$$

, donde n es el orden de G .

La gráfica de la figura 2.5 tiene $\chi(G) \geq 3$, debido a que los vértices v_1 , v_3 y v_4 no pueden colorearse con menos de tres colores pues son adyacentes dos a dos. Por otra parte, con la coloración C_2 mostramos que existe al menos una coloración propia con tres colores, por lo tanto $\chi(G) = 3$.

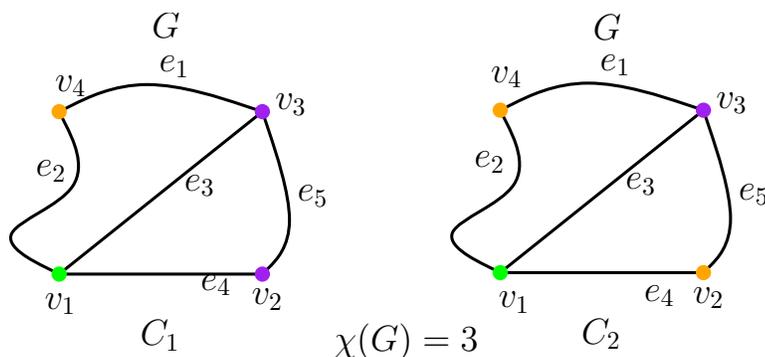


Figura 2.5: Dos coloraciones de la gráfica G , únicamente C_2 es una coloración propia

El *índice cromático* G es el mínimo entero k , tal que las aristas de G tienen una k -coloración propia, y lo denotamos como $\chi_1(G)$. En la figura 2.6 mostramos dos ejemplos de coloración de aristas de una gráfica G , de las cuales únicamente C_2 es una coloración propia. En este caso G tiene $\chi_1(G) \geq 3$ debido a que $\Delta(G) = 3$ (cada arista incidente en un vértice de grado tres requiere un color distinto). Por otra parte con la coloración C_2 mostramos que existe al menos una coloración propia que usa tres colores. Por tanto $\chi_1(G) = 3$

Existen cotas para el número cromático de una gráfica G . El teorema 2, proporciona una cota superior para dicho número.

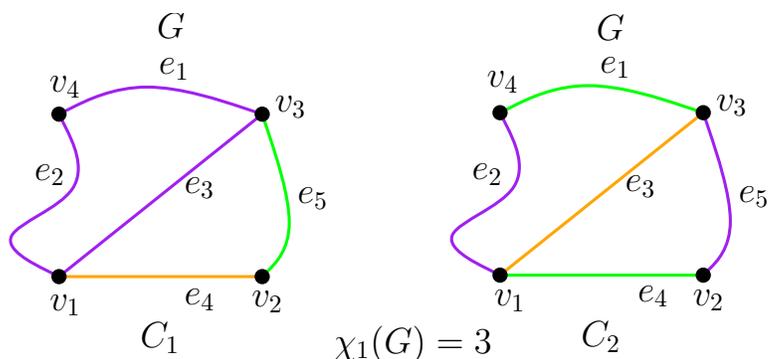


Figura 2.6: Dos coloraciones de aristas de la gráfica G , únicamente C_2 es una coloración propia

Teorema 2 ([1]) *Cualquier gráfica G con m aristas satisface*

$$\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}.$$

Prueba. Supongamos que $\chi(G) = k$. Notemos que entre cualesquiera dos clases cromáticas c_1 y c_2 de una k -coloración existe al menos una arista con uno de sus vértices en c_1 y el otro en c_2 , de lo contrario ambas clases cromáticas serían conjuntos independientes y podrían tener el mismo color. Si consideramos el número de aristas necesarias para cada par de clases cromáticas, entonces $m \geq k(k - 1)/2$; resolviendo esta desigualdad para k obtenemos la cota superior para el número cromático. \square

Para gráficas aplanables, existe una cota superior para el número cromático, enunciado en el siguiente teorema, para el cual no hemos incluido la demostración dada su complejidad.

Teorema 3 (De los cuatro colores [2]) *Toda gráfica aplanable es 4-coloreable.*

En la gráfica G_1 de la figura 2.7 mostramos un ejemplo de una gráfica 4-coloreable. Para gráficas que no contienen ciclos de tamaño tres, dicha cota la enunciamos a continuación.

Teorema 4 (Grötzsch 1959 [2]) *Toda gráfica aplanable que no contiene un triángulo (ciclo de orden 3) es 3-coloreable.*

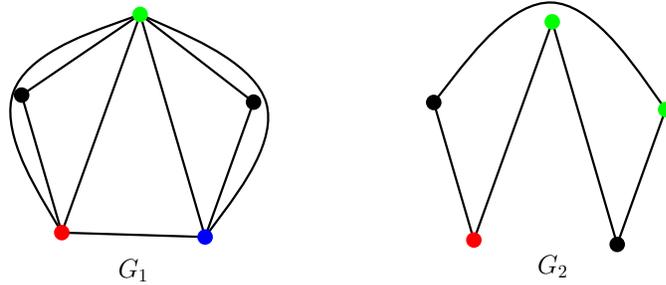


Figura 2.7: Gráficas planas, G_1 es 4-coloreables y G_2 es 3-coloreables

En la figura 2.7 la gráfica G_1 al tener ciclos de tamaño tres no es 3-coloreable, sin embargo, G_2 sí es 3-coloreable. Existen algunos teoremas que acotan inferiormente el número cromático de una gráfica, como es el caso del siguiente teorema.

Teorema 5 ([2]) *Sea H una subgráfica de una gráfica G , entonces*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Prueba. Supongamos que $\chi(G) = k$, de aquí sabemos que existe una k -coloración propia para los vértices de G . Esta k -coloración de G asigna distintos colores a vértices adyacentes en G . Como dos vértices son adyacentes en H si y sólo si también lo son en G , entonces H es k -coloreable, por tanto $\chi(H) \leq \chi(G)$. \square

Para el caso de coloraciones de aristas, el índice cromático claramente satisface $\chi_1(G) \geq \Delta(G)$; de otro modo la coloración no sería propia, pues dos aristas adyacentes tendrían el mismo color.

Teorema 6 (Vizing 1964 [4]) *Para cualquier gráfica G se cumple que:*

$$\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Este teorema permite clasificar gráficas finitas en dos clases, las que tienen índice cromático $\chi_1(G) = \Delta(G)$ y aquellas con índice cromático $\chi_1(G) = \Delta(G) + 1$.

Para el caso de gráficas bipartitas tenemos el siguiente teorema, que proporciona el valor exacto del índice cromático.

Teorema 7 (Kőnig 1916 [9]) *El índice cromático de una gráfica bipartita G satisface*

$$\chi_1(G) = \Delta(G).$$

Es importante notar que el problema del índice cromático de una gráfica G es equivalente al problema del número cromático de la gráfica de líneas de G , es decir $\chi_1(G) = \chi(L(G))$.

2.3. Gráficas geométricas

Un *dibujo* de una gráfica G es una representación de G en el plano, tal que cada vértice está representado por un punto distinto, y cada arista está representada por una curva que conecta los dos puntos correspondientes. Un dibujo G de una gráfica en el que cada arista está representada por un segmento de recta, decimos que es una *gráfica geométrica*. De aquí en adelante cada vez que hagamos referencia a una gráfica G damos por hecho que dicha gráfica es geométrica y completa. Por simplicidad llamaremos a los vértices de G *puntos*.

En la figura 2.8 mostramos tres dibujos de la gráfica (abstracta) K_5 , dos de ellos, G_1 y G_2 , son gráficas geométricas, mientras que G_3 no lo es.

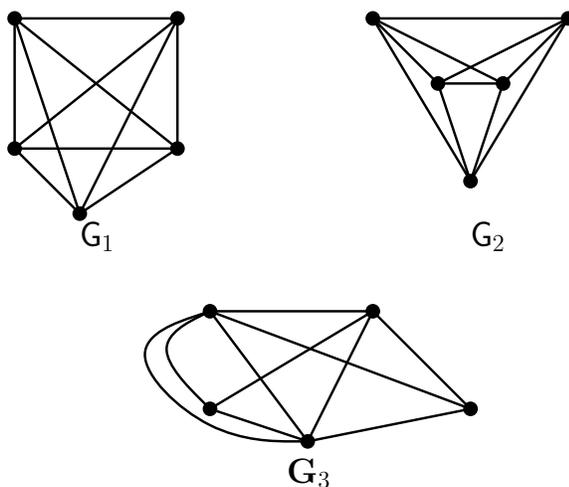


Figura 2.8: Dibujos de la gráfica (abstracta) K_5 , solamente G_1 y G_2 son gráficas geométricas

Todas las definiciones y conceptos de la sección 2.1 aplican de igual manera para gráficas geométricas, con excepción del concepto de adyacencia de aristas. En esta tesis el concepto de adyacencia es el siguiente:

Definición 1 *Dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común, o bien si se cruzan en algún punto.*

En la figura 2.9 ilustramos los dos casos en los que consideramos que dos aristas son adyacentes.

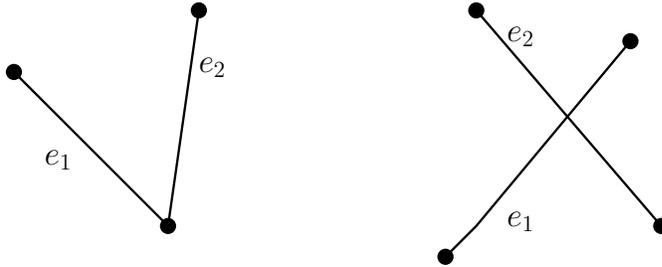


Figura 2.9: Aristas adyacentes

Es importante notar que al definir de esta manera el concepto de adyacencia, la estructura de las gráficas geométricas es totalmente diferente a la de gráficas abstractas.

El siguiente concepto es sumamente utilizado en muchas de las demostraciones de esta tesis:

Definición 2 *Un dibujo de una gráfica en el plano es un thrackle si sus aristas se encuentran un número impar de veces*

Si las aristas de un *thrackle* son segmentos de recta, decimos que es un *thrackle rectilíneo*, en esta tesis únicamente usamos este tipo de *thrackles*, mismos que en adelante llamaremos únicamente *thrackle*. Sea G una gráfica y sea T un *thrackle*, si $V(T) \subseteq V(G)$ y $E(T) \subseteq E(G)$ decimos que T es un *thrackle* de G y lo denotamos como $T(G)$. En la figura 2.10 ilustramos dos ejemplos de dicha estructura.

Un *thrackle* que no es un subconjunto de otro *thrackle* es llamado un *thrackle maximal*, como el mostrado en la gráfica G_1 de la figura 2.10.

En este trabajo las gráficas que estudiamos están definidas únicamente sobre los siguientes tipos de conjuntos: decimos que un conjunto S de puntos en el plano está en *posición general* si cualesquiera tres puntos de S son no-colineales. Decimos que los puntos de S están en *posición convexa* si son los vértices de un polígono convexo. Tal y como lo mostramos en la figura 2.11 el conjunto S está en posición convexa, el conjunto S' está en posición general pero no en posición convexa, mientras que S'' no está ni en posición convexa ni en posición general. Se dice que G es una *gráfica en posición convexa* si $V(G)$ es un conjunto de puntos en posición convexa. Notamos que cualesquiera dos gráficas en posición convexa tienen los mismos cruces y las mismas incidencias, de aquí que si una gráfica en posición convexa

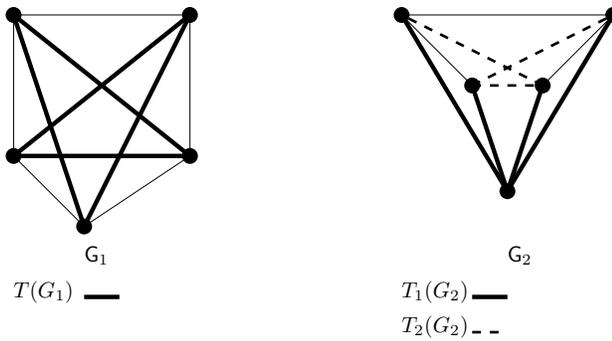


Figura 2.10: Ejemplo de *thrackel* de una gráfica geométrica, donde $T(G_1)$ es un *thrackle* maximal

tiene una k -coloración entonces todas las gráficas en posición convexa del mismo orden son k -coloreables. Se dice que G es una *gráfica en posición general* si $V(G)$ es un conjunto de puntos en posición general.

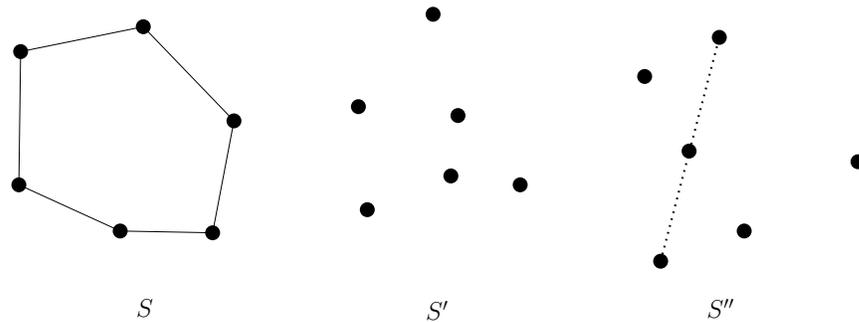


Figura 2.11: Ejemplo de conjuntos de puntos en posición convexa y general

Al igual que en gráficas abstractas una gráfica geométrica $G_{r,b}$ es *bipartita* si es posible partir su conjunto de vértices V en dos subconjuntos R y B , tales que $V = R \cup B$ y $R \cap B = \emptyset$, y cada arista de $G_{r,b}$ une un vértice de R con un vértice de B . R y B son llamados componentes de V . Sea $G_{r,b}$ una gráfica bipartita, denotamos con r al número de puntos en la clase R , con b al número de puntos en la clase B , y denotamos con $n = r + b$ al orden de $G_{r,b}$. En la figura 2.12 mostramos un ejemplo de esta gráfica.

Dada una etiquetación, en el sentido de las manecillas del reloj, de los vértices de una gráfica en posición convexa G , decimos que dos vértices con índices p_i y p_{i+1} , son *contiguos* en G . Una propiedad de este tipo de gráficas es que la recta que pasa por cualesquiera dos puntos contiguos de la misma,

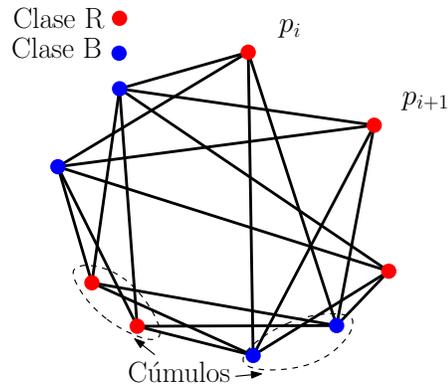


Figura 2.12: Ejemplo de gráfica bipartita y concepto de cúmulos

deja en el mismo semiplano al resto de vértices de la gráfica. Un *cúmulo* de $G_{r,b}$ es un conjunto de puntos contiguos de una misma clase, tal como lo ilustra la figura 2.12.

Decimos que una gráfica geométrica bipartita es *separable por una recta* si existe una recta tal que deja en el mismo semiplano a todos los puntos de R y, en el otro semiplano, a todos los puntos de B . Decimos que la gráfica bipartita en posición convexa es *alternante* si no tiene puntos contiguos de la misma clase. Notemos que este último tipo de gráficas, siempre tiene el mismo número de puntos en cada clase, es decir $r = b$. Ver figura 2.13.

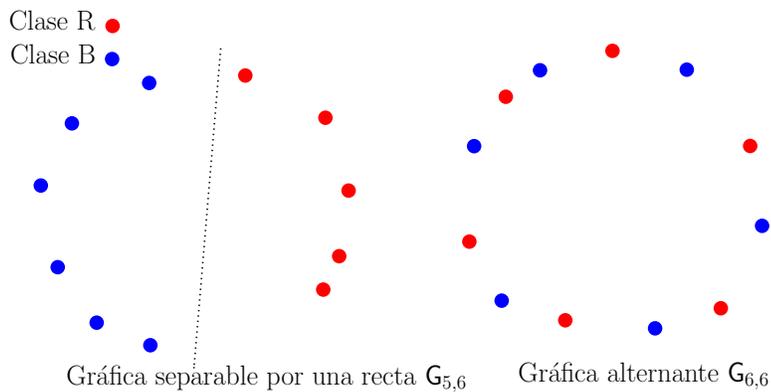


Figura 2.13: Tipos particulares de gráficas bipartitas

2.4. Coloraciones en gráficas geométricas

Como en gráficas, una k -coloración de las aristas de una gráfica geométrica G es una función suprayectiva $f : E(G) \rightarrow C$, donde C es el conjunto de enteros $\{1, 2, 3, \dots, k\}$. De igual manera, una coloración es *propia* si para cualesquiera dos aristas adyacentes e y e' se tiene que $f(e) \neq f(e')$. Por supuesto que al mínimo entero k , tal que la gráfica G tiene una coloración propia que usa k -colores distintos, lo llamamos el *índice cromático* de G y usamos la notación $\chi_1(G)$. A continuación definimos el *índice cromático geométrico* de una gráfica.

Definición 3 Sea G una gráfica abstracta, el índice cromático geométrico de G es el mayor entero k para el cual existe una gráfica geométrica G de G tal que $\chi_1(G) = k$, denotado por $\chi_g(G)$.

Debido a que el concepto de adyacencia en gráficas, es distinto al que usamos aquí para gráficas geométricas, los teoremas existentes para número cromático y para el índice cromático no son necesariamente válidos para gráficas geométricas. Es decir, las incidencias en los vértices se mantienen al dibujar una gráfica en el plano, sin embargo, los cruces entre aristas dependerán del conjunto de puntos sobre el que se dibuje dicha gráfica (propiedad que en una gráfica abstracta no existe). Un ejemplo de esto se muestra en la figura 2.14, donde consideramos la gráfica completa con cuatro vértices sobre un conjunto de puntos que está en posición convexa, y sobre otro conjunto que no lo está. Claramente el índice cromático es distinto para cada gráfica. Cabe señalar que el índice cromático geométrico de la gráfica completa de orden cuatro es 4.

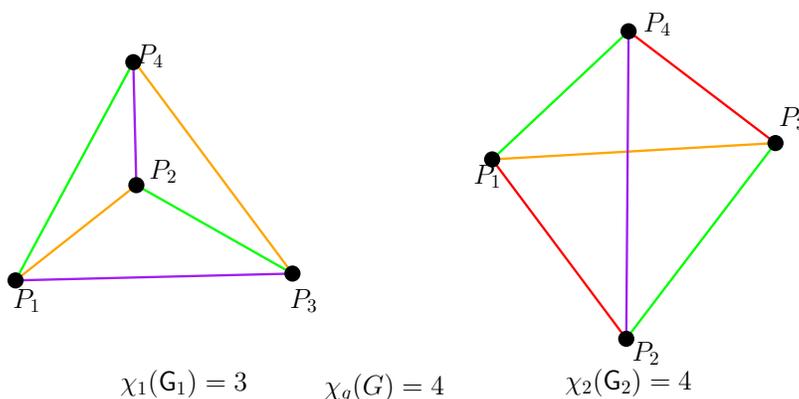


Figura 2.14: Gráficas de orden 4, dibujadas sobre conjuntos distintos

Capítulo 3

Estado del arte

En este capítulo citamos algunos de los artículos relacionado con el estudio de gráficas geométricas. Dado que los vértices de una gráfica geométrica son puntos en el plano y que sus aristas son segmentos que unen dichos puntos, algunos teoremas respecto a conjuntos de puntos en el plano son igualmente válidos para gráficas geométricas, o bien permiten inferir algunas propiedades de las mismas. Tal es el caso de los resultados que citamos a continuación.

El siguiente teorema de P. Erdős es de suma importancia en varias de las demostraciones de esta tesis.

Teorema 8 (P. Erdős [12]) *Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general, sea T un conjunto de segmentos que unen puntos de S y que además se cruzan dos a dos. T contiene a lo más n segmentos.*

Prueba. La siguiente demostración fue dada por el matemático Micha Perles. Sea T un *thrackle*. Decimos que $v \in V(T)$ es un *vértice punteado* si todas las aristas que inciden en él residen en uno de los semiplanos acotado por una línea que pasa por v , ver figura 3.1 parte a. Por cada vértice punteado v , borramos de T la arista más a la izquierda incidente en v , que es el primer elemento en el orden de las aristas en el sentido de las manecillas del reloj al rededor del semiplano que contiene a todas las aristas que inciden en v (ésta existe dado que v es punteado). Supongamos que ha sobrado al menos una arista $uv \in E(T)$, ésta no podría ser la de más a la izquierda de u ni la de más a la izquierda de v , de serlo, originalmente T tendría dos aristas uv' $u'v$, con $\angle v'uv < \pi$ y $\angle u'vu < \pi$, las cuales deben residir en lados distintos de la línea uv , ver figura 3.1 parte b. Por lo que son disjuntas,

contrario al supuesto de que forman un *thrackle*. Por lo que necesariamente se han borrado todas las aristas de T , lo que prueba el teorema. \square

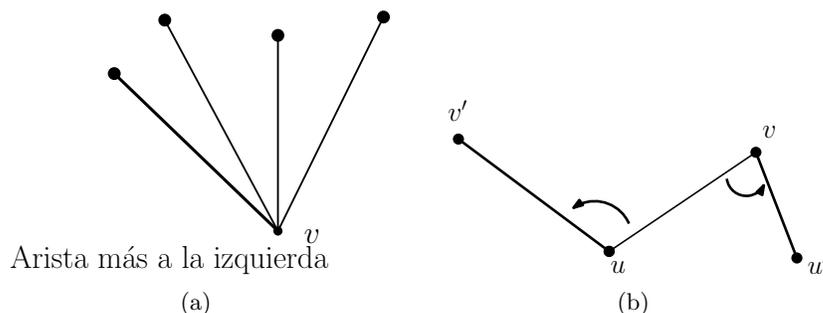


Figura 3.1: (a) Vértice punteado; (b) Argumento de Perles.

Ya que este teorema acota superiormente el tamaño del *thrackle* de una gráfica geométrica, permite acotar inferiormente el índice cromático. Esto porque en una coloración propia de una gráfica G , cada arista del *thrackle* debe tener distinto color, pues todas estas aristas son adyacentes dos a dos. Otro resultado interesante respecto a conjuntos de puntos es el siguiente.

Teorema 9 (Erdős [12]) *Para cualquier conjunto de n puntos en el plano la distancias mínima ocurre a lo más $3n - 6$ veces.*

A groso modo, la demostración de este teorema se basa en el hecho de que dos segmentos de longitud mínima no se pueden intersectar, por lo que la gráfica formada por los vértices del conjunto y los segmentos de longitud mínima es una gráfica plana, y entonces cumple con la fórmula de Euler $n - A + C = 2$, de donde despejamos A que es el número de aristas, que corresponde al número de segmentos de longitud mínima, C es el número de caras. Como cada cara tiene al menos tres aristas y cada arista está en dos caras $3C \leq 2A$, de donde podemos deducir la expresión buscada.

En cuanto a conjuntos independientes de aristas de una gráfica geométrica, en [13] el autor muestra lo siguiente: una gráfica en posición general con n vértices y que no contenga $k + 1$ pares de aristas disjuntas, tiene a lo más $2^9 k^2 n$ aristas, con $k < n/2$. Este teorema fue usado en [3] para acotar superiormente el índice cromático de gráficas geométricas en posición general.

Un subconjunto A de aristas de una gráfica geométrica tales que dos a dos no tienen vértices en común, es llamado un *emparejamiento*. Un *emparejamiento perfecto* de un conjunto S de $2k$ puntos en posición general es un

emparejamiento en el que los k segmentos de éste no se cruzan entre sí. Respecto al número de emparejamientos que se pueden formar con las aristas de una gráfica geométrica, tenemos un resultado conocido [2]: el número de emparejamientos perfectos $pm(S)$, para puntos en posición convexa es $pm(S) = 1/(k+1)\binom{2k}{k}$. Para puntos en posición general en [14] los autores demuestran que $pm(S) \geq 1/(k+1)\binom{2k}{k}$. Sobre esta misma propiedad el autor de [15] muestra que la igualdad sólo se mantiene para conjuntos de puntos en posición general, y para una configuración particular de seis puntos.

En cuanto a gráficas geométricas en [16], los autores demuestran los siguientes dos teoremas. El primero asegura que, dada una 2-coloración de las aristas de una gráfica completa en posición general, al menos una de las clases cromáticas contiene un árbol generador (árbol que contiene a todos los vértices de la gráfica) que no se cruza a sí mismo. El segundo asegura que, dada una 2-coloración de las aristas de una gráfica completa en posición general, en al menos una de las dos clases cromáticas existen $\lfloor (n+1)/3 \rfloor$ aristas disjuntas dos a dos.

En [3] se estudian el siguiente tipo de gráficas:

Definición 4 Sea S un conjunto de puntos en posición general y sea $n = |S|$. La gráfica de disyunción $D(S)$ es tal que sus vértices representan a todas las aristas (segmentos de recta) que se pueden formar con los n puntos de S . Dos vértices de $D(S)$, que representan a aristas e_1 y e_2 de S , son adyacentes si y sólo si e_1 y e_2 son disjuntas.

Definición 5 Sea S un conjunto de puntos en posición general y sea $n = |S|$. La gráfica de intersección $I(S)$ es el complemento de la gráfica de disyunción $D(S)$.

En la figura 3.2 mostramos un ejemplo de ambas gráficas. Los autores de [3] proporcionan cotas inferiores y superiores al número cromático de este tipo de gráficas para el caso en que los puntos de S están en posición convexa. Estas cotas son:

Teorema 10 Sea S un conjunto de puntos en posición convexa y sea $n = |S|$. El número cromático de $D(S)$ está acotado por:

$$2\lfloor (n+1)/3 \rfloor - 1 \leq \chi(D(S)) \leq \min(n-2, n - \left(\frac{\lfloor \log(n) \rfloor}{2}\right)).$$

Teorema 11 Sea S un conjunto de puntos en posición convexa y sea $n = |S|$. El número cromático de $I(S)$ es:

$$\chi(I_c) = n.$$

Mientras que para puntos en posición general proporcionan las siguientes cotas:

Teorema 12 Sea S un conjunto de puntos en posición general y sea $n = |S|$. El número cromático de $D(S)$ está acotado por:

$$5\lfloor n/7 \rfloor - 1 \leq \chi(D(S)) \leq \min(n - 2, n + \frac{1}{2} - (\frac{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}{2})).$$

Teorema 13 Sea S un conjunto de puntos en posición general y sea $n = |S|$. El número cromático de $I(S)$ está acotado por:

$$n \leq \chi(I(S)) \leq Cn^{3/2}.$$

Para $C > 0$

Cabe señalar que una de las contribuciones más relevantes de esta tesis es haber mejorado la cota inferior y superior para $\chi(D(S))$ con $D(S)$ definido sobre puntos en posición general, ver sección 5.1.

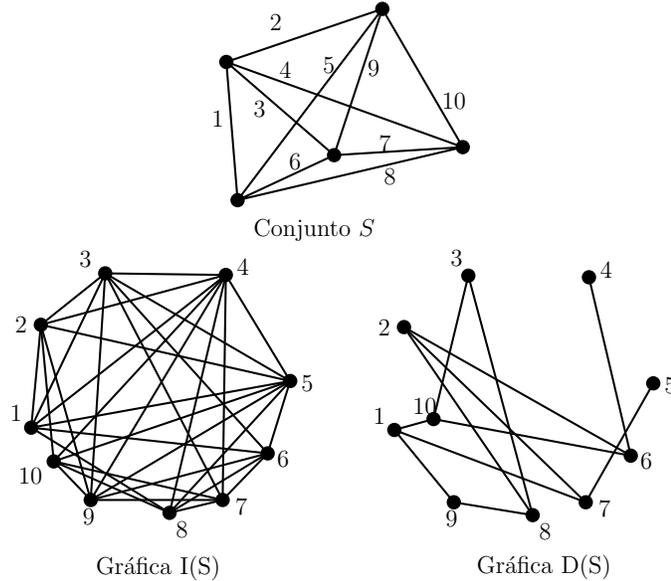


Figura 3.2: Gráficas $I(S)$ y $D(S)$ de un conjunto S de puntos en el plano

Sobre este mismo problema tenemos el artículo [4]. Sus autores mejoran algunas de las cotas encontradas en [3] para $D(S)$ definida sobre puntos en posición convexa ellos demuestran que:

Teorema 14 Sea S un conjunto de puntos en posición general y sea $n = |S|$. El número cromático de $D(S)$ está acotado por:

$$n - \sqrt{2n + 1/4} + 1/2 \leq \chi(D(S)) < n - \sqrt{1/2n - 1/2 \ln n} + 1/4.$$

Para obtener este resultado los autores estudian las gráficas de tipo *convex thrackle*: un *convex thrackle* de un conjunto de puntos P , es una gráfica geométrica cuyo conjunto de vértices es P y tal que cada par de aristas son adyacentes. Los autores de [4] obtienen el siguiente teorema: para todo conjunto de puntos en posición convexa, la unión de k *convex thrackles* maximales sobre P tiene a lo sumo $kn - \binom{k}{2}$ aristas. En esta tesis generalizamos este teorema para puntos en posición general. En [18] el autor proporciona el número cromático exacto de la gráfica $D(S)$ para puntos en posición convexa, esto lo hace utilizando la cota inferior encontrada en [4] y proporcionando una coloración que usa justamente ese mismo número de colores, de manera que: $\chi(D(S)) = n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} + 1/2 \rfloor$.

Existen otro tipo de índices para gráficas geométricas. Por ejemplo, el índice acromático es el entero más grande k para el cual existe una coloración propia y completa de las aristas de G que usa k colores distintos. El índice pseudo-acromático es el entero más grande k para el cual existe una coloración completa de las aristas de G que usa k colores distintos. En [5] estudian estos índices, los autores demuestran que para n puntos en el plano en posición convexa, el índice acromático y el índice pseudo-acromático de una gráfica geométrica completa es $\lfloor \frac{n^2+n}{4} \rfloor$.

Capítulo 4

Gráficas completas en posición convexa

En este capítulo estudiamos el índice cromático de gráficas completas en posición convexa: en la sección 4.1 empezamos por estudiar dos casos particulares de gráficas bipartitas completas para después generalizar el resultado, damos una cota inferior y una cota superior para gráficas bipartitas en posición convexa. Luego, en la sección 4.2 estudiamos el índice cromático de gráficas completas no bipartitas, damos el valor exacto del índice cromático. Finalmente, en la sección 4.3 estudiamos dos casos particulares de gráficas en posición general, para las cuales damos el valor exacto del índice cromático.

4.1. Gráficas bipartitas completas

En esta sección acotamos inferior y superiormente el índice cromático de gráficas bipartitas completas en posición convexa. Primero estudiamos las gráficas bipartitas alternantes, para las que damos el valor exacto del índice cromático, después estudiamos las gráficas bipartitas separables por una recta, y damos el valor exacto de su índice cromático.¹

4.1.1. Índice cromático de gráficas alternantes y gráficas separables por una recta

Lema 1 *El índice cromático de una gráfica bipartita alternante $G_{r,b}$ tal que $r = b$, es r .*

¹Los resultados mostrados en esta sección fueron obtenidos en conjunto con Gabriel Medina Álvarez y la Doctora Dolores Lara Cuevas

Prueba. Sea p un punto de $G_{r,b}$. Como el grado de cada punto de $G_{r,b}$ es r en p inciden r aristas (ver figura 4.1), para que la coloración sea propia, requiere que cada una de estas r aristas tenga un color distinto, entonces $\chi(G_{r,b}) \geq r$. Por otra parte, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los vértices de la gráfica $G_{r,b}$ son los vértices de un polígono regular P de $2r$ lados (y $2r$ vértices) y que las aristas de la gráfica corresponden a segmentos de recta que unen dichos vértices. En la figura 4.1 mostramos una gráfica, y el polígono que la representa. En esta misma figura las diagonales entre puntos de la misma clase cromática son representadas con líneas punteadas, evidentemente estas diagonales no están en $G_{r,b}$. Es decir, hay r clases de rectas paralelas en P que no están en $G_{r,b}$, con ello hemos eliminado r clases de rectas paralelas de P (ver figura 4.1). Se sabe que en un polígono regular de $2r$ lados hay $2r$ diferentes clases de rectas paralelas, como en P eliminamos r clases de éstas, en realidad P únicamente tiene r clases de rectas paralelas. Asignamos a las aristas de una clase el mismo color, en la figura 4.1 mostramos dos de estas clases así como el color que tendría cada una. Esta coloración es propia porque asigna un mismo color a dos aristas sí y sólo sí son paralelas, y usa r colores distintos. Por lo que existe una coloración propia que usa r colores. Por lo tanto $\chi(G_{r,b}) = r$. \square

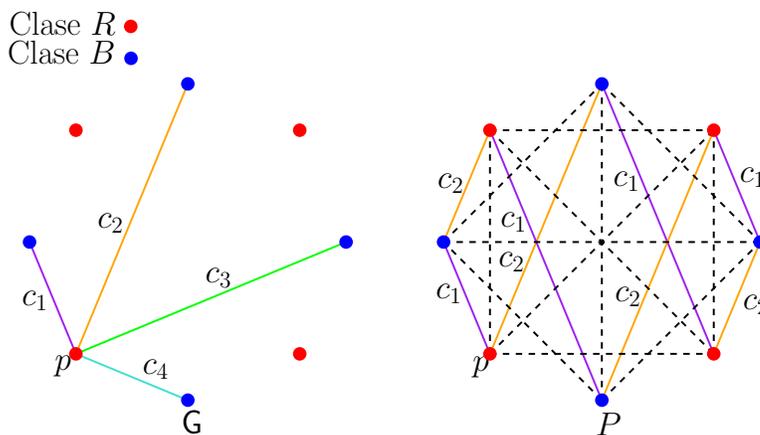


Figura 4.1: Ejemplo de una gráfica alternante $G_{r,b}$ y el polígono usado para colorearla con r colores

El siguiente lema da el índice cromático para gráficas bipartitas cuyos elementos son separables por una recta.

Lema 2 *El índice cromático de una gráfica bipartita $G_{r,b}$ separable por una recta es $r + b - 1$.*

Prueba.

Sea p un punto de la clase R y sea q un punto de la clase B , tales que son contiguos. Todas las aristas que salen del punto p (b aristas) son adyacentes a todas las aristas que salen del punto q (r aristas), es decir, forman un *thrackle* T , tal como lo muestra la figura 4.2. Dado que ambos puntos tienen una arista en común el tamaño de T es $r + b - 1$ aristas. Por tanto: $\chi(\mathbb{G}_{r,b}) \geq r + b - 1$. Notemos que cada arista e_{p_i,q_j} , donde p_i es un punto de la clase R diferente de p y q_j es un punto de la clase B diferente de q , es paralela a alguna de las $r + b - 1$ aristas de T . Para esto etiquetemos los puntos de la clase R en el sentido de las manecillas del reloj, empezando por p y etiquetemos los puntos de la clase B en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, empezando por q . Sea $t_r = i - 1$ y sea $t_b = j - 1$. Si $t_r < t_b$, la arista de T paralela a e_{p_i,q_j} es $e_{p,q_{t_b-t_r}}$, ver figura 4.2. Si $t_b < t_r$, la arista de T paralela a e_{p_i,q_j} es $e_{p_{t_r-t_b},q}$, ver figura 4.2. Por lo que $r + b - 1$ son suficientes para colorear el total de aristas de $\mathbb{G}_{r,b}$. Dada esta coloración tenemos que: $\chi(\mathbb{G}_{r,b}) \leq r + b - 1$. Considerando que la cota inferior y la superior son la misma: $\chi(\mathbb{G}_{r,b}) = r + b - 1$. \square

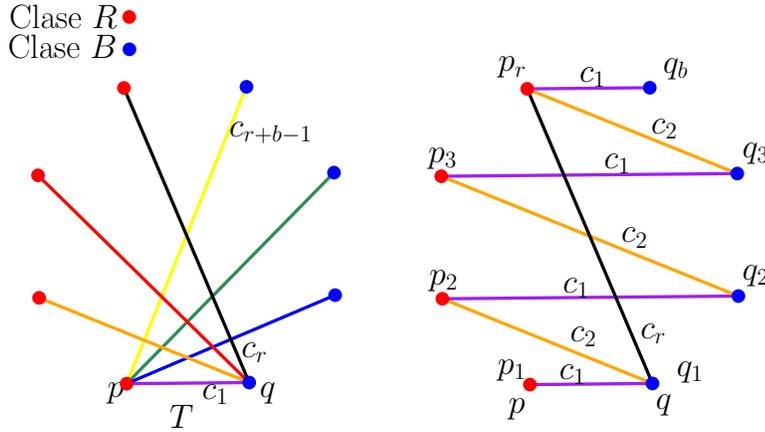


Figura 4.2: *Thrackle* de una gráfica separable por una recta y construcción de una coloración para la misma

4.1.2. Cota superior

En esta sección damos una cota superior para el índice cromático de gráficas bipartitas en posición convexa, que no necesariamente son alternantes ni separables por una recta.

Teorema 15 Sea $G_{r,b}$ una gráfica bipartita con k cúmulos de una misma clase, su índice cromático está acotado por:

$$\chi_1(G) \leq n - k$$

, donde $n = r + b$.

Prueba. Para probar este lema describimos una coloración propia que usa $n - k$ colores, para obtener dicha coloración construimos a partir de $G_{r,b}$ una gráfica alternante de la siguiente manera: consideremos los puntos de $G_{r,b}$, insertamos entre cada dos puntos contiguos de la misma clase un punto de clase distinta. Por ejemplo, sean p_1 y p_2 dos punto de la clase R , tales que son contiguos, entre estos dos puntos insertamos un nuevo punto q de la clase B . Al llevar a cabo este procedimiento para cada par de puntos de la misma clase y contiguos se obtiene una gráfica alternante, un ejemplo de esto lo muestra la figura 4.3 donde los puntos insertados son los de mayor tamaño. Sea S' el conjunto de puntos insertados de ambas clases y sea $\rho = |S'|$, entonces dicha gráfica alternante tiene un total de $r + b + \rho$ puntos, con $(r + b + \rho)/2$ puntos en cada clase. Es decir, la gráfica alternante obtenida es $G_{(r+b+\rho)/2, (r+b+\rho)/2}$. Para esta última, por el lema 1 sabemos que existe una coloración propia \mathcal{C} que usa $(r + b + \rho)/2$ colores. Sin pérdida de generalidad podemos ver a $G_{r,b}$ como una subgráfica de $G_{(r+b+\rho)/2, (r+b+\rho)/2}$, por lo que la coloración \mathcal{C} es igualmente válida para $G_{r,b}$, como lo mostramos en la figura 4.3 las aristas con algún extremo en S' simplemente las eliminamos. Con ello tenemos una coloración propia para $G_{r,b}$ que usa $(r + b + \rho)/2$. Ahora procedemos a calcular el valor de ρ : el número de puntos de la clase B que insertamos es $r - k$, pues para que cada dos puntos de R queden separados por un punto de B , necesitamos r puntos menos, uno por cada cúmulo (porque en un cúmulo unitario no se inserta ningún punto), o sea $r - k$ puntos; lo mismo ocurre con el número de puntos de la clase R , que es $b - k$. Es decir, $\rho = r + b - 2k$, sustituyendo el valor de ρ obtenemos que la coloración \mathcal{C} usa $(r + b + (r + b - 2k))/2$ colores, o sea $n - k$ colores, con $n = r + b$, tal como queríamos demostrar. \square

4.1.3. Cota inferior

El siguiente lema acota el tamaño del *thrackle* en una gráfica bipartita. Este lema es usado para demostrar el resultado principal de esta sección, una cota inferior para el índice cromático de gráficas bipartitas.

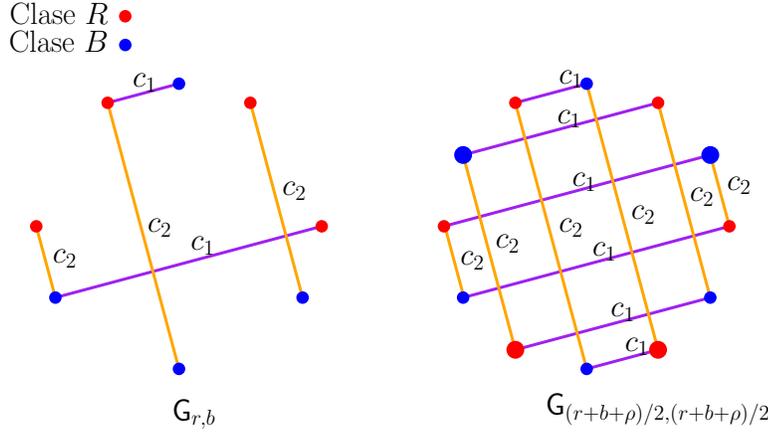


Figura 4.3: Coloración que usa $n-k$ colores para la gráfica $G_{r,b}$ con k cúmulos de una misma clase

Lema 3 La gráfica bipartita $G_{r,b}$ con k cúmulos de una misma clase, tiene un *thrackle* de tamaño $n - k$, si k es impar.

Prueba. Sean H_1, H_2, \dots, H_{2k} los $2k$ cúmulos de $G_{r,b}$ etiquetados en el sentido de la manecillas del reloj (ver figura 4.4). Consideremos las subgráficas G_1, G_2, \dots, G_k de $G_{r,b}$ formadas de la siguiente manera: $V(G_i) = H_i \cup H_{i+k}$ y $E(G_i) = e_{p,q} | p \in H_i, q \in H_{i+k}$, al ser k impar H_i y H_{i+k} pertenecen a clases distintas. En la figura 4.4 mostramos un ejemplo de la construcción de estas subgráficas para $G_{6,6}$. Notemos que estas subgráficas son de la forma separables por una recta. Sea $r_i = |H_i|$ y $b_i = |H_{i+k}|$, por el lema 2 tenemos que $T(G_i) = r_i + b_i - 1$. Observemos que cualesquiera dos aristas $e_i \in T(G_i)$ y $e_j \in T(G_j)$ con $i \neq j$ se cruzan: tomemos cualquiera de las dos, digamos e_i , la cual divide a $G_{r,b}$ en dos regiones cada región contiene $k - 1$ cúmulos, los cúmulos H_j y H_{j+k} quedan en regiones distintas, debido a que debe haber $j - (j - k) = k$ cúmulos de separación entre ellos, tenemos que cualquier arista e_j de G_j cruza a e_i pues debe tener un extremo en H_j y el otro en H_{j+k} . Debido a esta propiedad, la suma de las aristas de todos los $T(G_i)$ es a su vez un *thrackle* de $G_{r,b}$. Dicha suma es: $|T(G_{r,b})| = \sum_{i=1}^k (r_i + b_i - 1) = r + b - k$, finalmente tenemos un *thrackle* de tamaño $|T(G_{r,b})| = n - k$. \square

Finalmente, podemos enunciar el resultado principal de esta sección para k impar.

Teorema 16 Sea $G_{r,b}$ una gráfica bipartita con k cúmulos de una misma

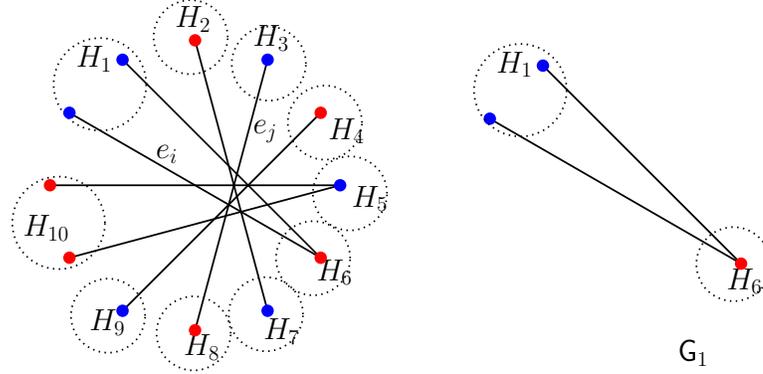


Figura 4.4: *Thrackle* de la gráfica $G_{r,b}$, con k cúmulos de misma clase, y gráficas G_i

clase, su índice cromático está acotado por:

$$\chi_1(G) \geq n - k$$

, donde $n = r + b$ para k impar.

Prueba. Por el lema 3, $G_{r,b}$ tiene una *thrackle* de tamaño $n - k$, para que la coloración sea propia cada arista de dicho *thrackle* debe tener un color distinto, entonces $\chi_G \geq n - k$, como queríamos demostrar. \square

Para el caso en que k es par sea r_{min} el número de puntos en el cúmulo de menor tamaño de $G_{r,b}$, sin pérdida de generalidad supongamos que este cúmulo pertenece a la clase R . Para este caso tenemos el siguiente lema.

Lema 4 *La gráfica bipartita $G_{r,b}$ con k cúmulos de una misma clase, tiene un *thrackle* de tamaño $n - k - (r_{min} - 1)$, si k es par.*

Prueba. Sea $G_{r',b'}$ la subgráfica inducida de $G_{r,b}$ resultante de eliminar de $G_{r,b}$ el cúmulo de menor tamaño, claro que $r' = r - r_{min}$ y $b' = b$, sea k' el número de cúmulos de $G_{r',b'}$, debido a que eliminamos un cúmulo de la clase R y al ocurrir esto dos cúmulos de la clase B se hicieron uno, entonces $k' = k - 1$, como k es par k' debe ser impar. Por el lema 3 la gráfica $G_{r',b'}$ tiene un *thrackle* de tamaño $r' + b' - k'$, este *thrackle* también es un *thrackle* de $G_{r,b}$. Por tanto sustituyendo los valores de r' , b' y k' obtenemos que $G_{r,b}$ tiene un *thrackle* de tamaño $r - r_{min} + b - (k - 1) = r + b - k - (r_{min} - 1)$, como queríamos demostrar. \square

El lema anterior nos permite dar el siguiente resultado:

Teorema 17 *Sea $G_{r,b}$ una gráfica bipartita con k cúmulos en una misma clase, su índice cromático está acotado por:*

$$\chi_G \geq n - k - (r_{\min} - 1)$$

, donde $n = r + b$ para k par.

Prueba. Por el lema 4, $G_{r,b}$ tiene una *thrackle* de tamaño $n - k - (r_{\min} - 1)$, para que la coloración sea propia cada arista de dicho *thrackle* debe tener un color distinto, entonces $\chi_G \geq n - k - (r_{\min} - 1)$, como queríamos demostrar. \square

4.2. Gráficas completas en posición convexa

En esta sección damos el valor exacto del índice cromático para gráficas completas en posición convexa.

4.2.1. Cota inferior

Lema 5 *Sea G_n una gráfica geométrica convexa y completa con n vértices, su índice cromático está acotado por:*

$$\chi(G_n) \geq n.$$

Prueba.

Etiquetemos los vértices de G_n en el sentido de las manecillas del reloj, ver figura 4.5. Sea p_1 el vértice de G_n con índice 1, en una coloración propia las $n - 1$ aristas que inciden en p_1 deberán tener colores distintos. La arista e_{p_n, p_2} es adyacente a las $n - 1$ aristas que inciden en p_1 , pues la recta que pasa por los puntos p_n y p_2 deja en uno de sus semiplanos al punto p_1 y a los $n - 3$ puntos restantes en el otro semiplano. Por tanto, cualquier arista que vaya de p_1 a cualquier punto diferente de p_n y de p_2 deberá cruzar a la arista e_{p_n, p_2} . Por lo que debemos usar al menos n colores distintos para colorear estas n aristas que forman un *thrackle* de G_n , tal como lo muestra la figura 4.5. \square

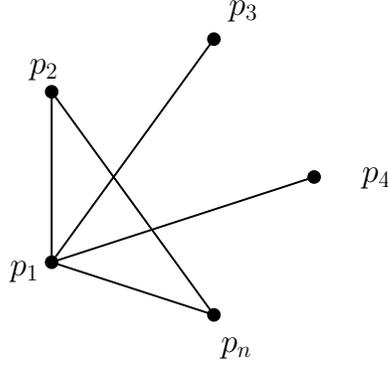


Figura 4.5: *Thrackle* de la gráfica G_n , con $n = 5$

4.2.2. Cota superior

El siguiente lema proporciona una cota superior para el índice cromático de la gráfica geométrica convexa y completa con n vértices.

Lema 6 *Sea G_n una gráfica geométrica convexa y completa con n vértices, existe una coloración propia y completa para G_n que usa n colores diferentes.*

Prueba.

Etiquetemos los vértices de G_n en el sentido de las manecillas del reloj. Sea p_1 el vértice de G_n con índice 1. Asignemos a las aristas de la forma e_{p_1, p_j} , con $j \neq 1$ un color distinto, se tienen entonces $n - 1$ colores distintos. Como en la demostración del lema anterior, la arista e_{p_n, p_2} es adyacente a todas las aristas de la forma e_{p_1, p_j} , con ello tenemos n diferentes colores. Sea e_{p_j, p_k} cualquier aristas de G_n cuyos índices cumplen con: $j, k > 1$ y $k < j$. Sea r el mínimo número de aristas que hay entre p_1 y el extremo de e_{p_j, p_k} más cercano a él, es decir, $r = \min\{(n + 1) - j, k - 1\}$. Si $(n + 1) - j \neq k - 1$ tenemos dos casos. El primero es que $r = (n + 1) - j$ (ver figura 4.6 caso 1), en este caso asignamos a la arista e_{p_j, p_k} el color de la arista $e_{p_1, p_{k-r}}$. El segundo caso (ver figura 4.6 caso 2) es que $r = k - 1$, para este caso asignamos a la arista e_{p_j, p_k} el color de la arista $e_{p_1, p_{j+r}}$. Un tercer caso ocurre cuando $(n + 1) - j = k - 1$, asignamos a la arista e_{p_j, p_k} el color de la arista e_{p_n, p_2} (ver figura 4.6 caso 3). Para que esta coloración sea propia dos aristas adyacentes digamos e_{p_i, p_j} y e_{p_k, p_l} deben tener distintos colores. Supongamos dos aristas e_{p_i, p_j} y e_{p_k, p_l} que tienen el mismo color, el de la arista e_{p_y, p_x} , por la coloración usada $r' = |y - i| = |x - j|$ y $r'' = |y - k| = |x - l|$, para estos valores se debe cumplir una de las dos desigualdades $r' < r''$ ó $r' > r''$, de lo contrario estaríamos hablando de la misma arista, sin pérdida de generalidad

supongamos que $r' < r''$, condición que obliga a que e_{p_i, p_j} y e_{p_k, p_l} sean paralelas (ver figura 4.7). \square

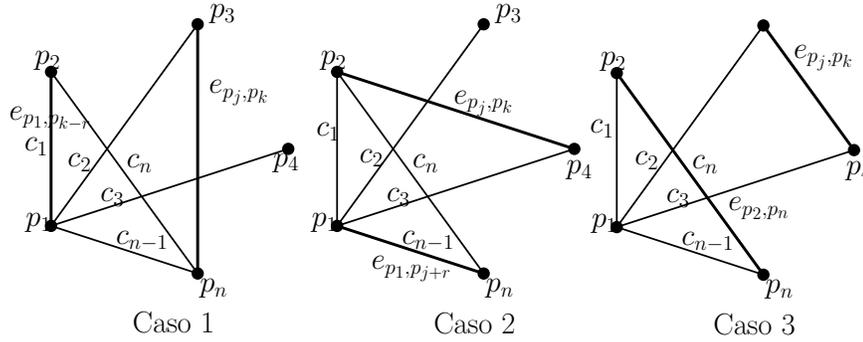


Figura 4.6: Tres casos de la coloración propia para G_n , con $n = 5$

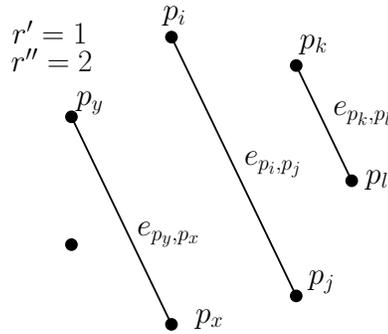


Figura 4.7: Dos aristas con el mismo color son necesariamente paralelas

Usando los lemas anteriores, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 18 Sea G_n una gráfica geométrica convexa y completa con n vértices, su índice cromático es:

$$\chi(G_n) = n.$$

Prueba.

Por el lema 5 $\chi(G_n) \geq n$, mientras que por el lema 6 $\chi(G_n) \leq n$. Por lo tanto $\chi(G_n) = n$ \square

4.3. Casos particulares en posición general

En esta sección estudiamos el índice cromático de gráficas dibujadas sobre dos tipos particulares de conjuntos en posición general.

4.3.1. Doble cadena convexa

Un conjunto es una *doble cadena convexa* [21] si está conformado por dos conjuntos convexos C_1 y C_2 del mismo tamaño con concavidad opuesta, con la propiedad de que la recta que pasa por cuales quiera dos puntos de un mismo conjunto, digamos C_1 , deja en uno de sus semiplanos a todos los puntos del otro conjunto, en este caso C_2 . En la figura 4.8 mostramos un ejemplo de este tipo de conjuntos. Una gráfica geométrica cuyo conjunto de vértices corresponde a una doble cadena convexa es llamada *gráfica de tipo doble cadena convexa*, por simplicidad llamamos a estas gráficas doble cadena convexa.

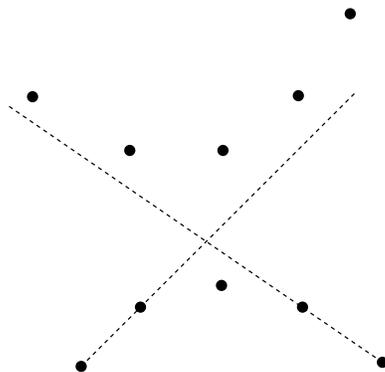


Figura 4.8: Conjunto de tipo doble cadena convexa

Cota inferior

Lema 7 Sea G una gráfica de tipo doble cadena convexa con $2n$ vértices y $n \geq 3$, su índice cromático está acotado por:

$$\chi(G) \geq 2n.$$

Prueba.

Para esta gráfica el número de aristas es $|E(G)| = 2n(2n-1)/2$, supongamos que $\chi(G) = 2n-1$, entonces el tamaño promedio de las clases cromáticas

es: $2n(2n - 1)/2(2n - 1)$, es decir; n . Sin embargo, ninguna clase cromática puede tener un tamaño mayor que n , esto porque una clase cromática se puede ver como un emparejamiento de los vértices de G , y todo emparejamiento de $2n$ vértices puede tener a lo más n parejas. Esto quiere decir que las $2n - 1$ clases cromáticas cumplen con $|c_i| = n$, para $0 \leq i \leq 2n - 2$. A continuación mostramos que necesariamente existe una clase cromática con tamaño menor que n .

Etiquetemos los vértices de C_1 en sentido contrario al de las manecillas del reloj, por otra parte etiquetemos los vértices de C_2 en sentido de las manecillas del reloj. Consideremos la arista e_{p_1, q_n} , supongamos que esta arista pertenece a la clase c_0 , sea l la recta dirigida que va de p_1 a q_n , mostramos un ejemplo en la figura 4.9 parte a. Si n es par entonces en cada uno de los semiplanos definidos por l hay $n - 1$ vértices (con $n - 1$ impar). Considérense los $n - 1$ vértices en l^+ (el caso es simétrico para l^-), para estos $n - 1$ vértices no es posible obtener un emparejamiento que use exactamente los $n - 1$ vértices, ya que todo emparejamiento usa un número par de vértices, si este vértice quisiera emparejarse con algún otro de los vértices que están l^- necesariamente cruzaría a l ; ello implica que necesariamente un vértice quedará sin ser *tocado* por la clase c_0 , Lo cual implica que la clase c_0 tiene un tamaño a los más de $n - 1$, lo que contradice el hecho de que todas las clases cromáticas tienen tamaño n .

Si n es impar, entonces la recta l deja un número par de vértices en cada uno de sus semiplanos. Consideremos los vértices en l^+ que son $n - 1$ vértice, todos pertenecientes a C_2 . Notemos que en C_2 hay $m' = n(n - 1)/2$ aristas. Sea c_0 la clase cromática a la que pertenece la arista e_{p_1, q_n} , para que la clase c_0 cumpla con $|c_0| = n$, debemos emparejar los $n - 1$ vértices en l^+ , con lo que estaríamos usando $(n - 1)/2$ aristas de C_2 . En general, sea c_i la clase cromática a la que pertenece la arista $e_{p_1, q_{n-i}}$, sea l_i la recta dirigida que va de p_1 a q_{n-i} , esta recta deja en su semiplano l_i^+ $n - (i + 1)$ vértices, ello quiere decir que necesariamente usaremos $\lfloor (n - (i + 1))/2 \rfloor$ aristas de C_2 (ver figura 4.9 parte b). Siguiendo este proceso hasta la arista e_{p_1, q_2} que pertenece a la clase c_{n-1} , esta clase cromática usa necesariamente una arista de C_2 , un ejemplo de esto se muestra en la figura 4.9 parte b. Dado que el número de aristas usado por las clases cromáticas c_i y c_{i-1} si i es par, es el mismo, el total de aristas que necesariamente se usan es $S = 2[1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)/2]$, esto es: $S = (n - 1)(n + 1)/4$. Por otra parte, un caso similar ocurre para las $(n - 1)$ aristas de la forma e_{q_1, p_i} para $2 \leq i \leq n$. Ello quiere decir que necesariamente se usan $2S$ aristas de C_2 , por tanto se debe cumplir que $2S \leq n(n - 1)/2$, o sea $2[(n - 1)(n + 1)/4] \leq n(n - 1)/2$ lo cual no es posible. Del argumento anterior deducimos que al menos una de las clases cromáticas

tiene tamaño menor que n , lo cual contradice el hecho de que todas las clases cromáticas tienen tamaño n . \square

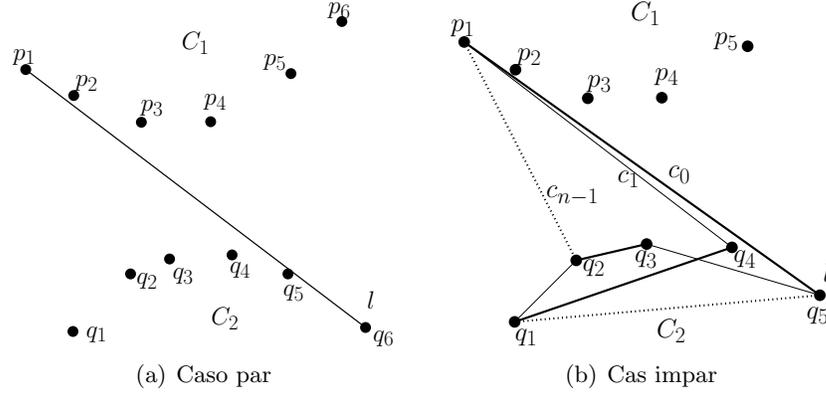


Figura 4.9: Ejemplo de clases cromáticas para una coloración de G

Cota superior

Lema 8 Sea G una gráfica de tipo doble cadena convexa con $2n$ vértices y $n \geq 3$, su índice cromático está acotado por:

$$\chi(G) \leq 2n.$$

Prueba.

En seguida proporcionamos una coloración para gráficas de tipo doble cadena convexa que usa $2n$ colores. Etiquetemos los vértices de cada cadena de la siguiente forma: C_1 en sentido contrario al de las manecillas del reloj y C_2 en sentido de las manecillas del reloj.

La primera clase cromática c_0 la constituyen las aristas e_{p_i, q_j} tales que $i = j$ y $p_i \in C_1$, $q_j \in C_1$, esta clase es de tamaño n dado que es un emparejamiento. La siguiente clase c_1 está constituida por aristas de la forma e_{p_i, q_j} tales que $j = i + 1$ $p_i \in C_1$, $q_j \in C_2$ para $1 \leq i \leq n - 1$. Así la clase cromática c_k está constituida por las aristas de la forma e_{p_i, q_j} tales que $j = i + k$, con este algoritmo el tamaño de la k -ésima clase es $|c_k| = n - k$ hasta que $k = n - 1$.

La clase cromáticas c_k para $n \leq k \leq 2(n - 1)$ contiene aristas de la forma e_{q_i, p_j} $q_i \in C_2$, $p_j \in C_1$ tales que $j = i + (k - (n - 1))$ está con tamaño $|c_k| = n - (k - (n - 1))$. El procedimiento anterior permite colorear todas

las aristas con un extremo en C_1 y otro en C_2 y viceversa, usando $2n - 1$ colores.

La clase cromática c_{2n-1} está constituida por las aristas de la forma e_{p_i, p_j} con $p_i, p_j \in C_1$ tal que $j = n - (i - 1)$ con $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$; y por las aristas de la forma e_{q_i, q_j} con $q_i, q_j \in C_2$ tal que $j = n - (i - 1)$ con $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$, con lo que hasta ahora se han usado $2n$ colores.

Las aristas restantes se pueden asignar a las clases cromáticas ya existentes, lo cual se lleva a cabo de la siguiente manera: Notemos que la clase cromática c_k con $1 \leq k \leq n - 1$ no tiene ninguna arista con alguno de sus extremos en los vértices q_i con $1 \leq i \leq k$ ni aristas con alguno de sus extremos en los vértices p_i con $(n - k) + 1 \leq i \leq n$, ver figura 4.10 parte b. Mientras que para la clase cromática c_k con $n \leq k \leq 2(n - 1)$ no tiene ninguna arista con alguno de sus extremos en los vértices p_i con $1 \leq i \leq (k - n) + 1$ ni aristas con alguno de sus extremos en los vértices q_i con $2n - k \leq i \leq n$

Para cada clase cromática c_k con $2 \leq k \leq n - 1$, asignemos a dicha clases las aristas de la forma e_{q_i, q_j} y $e_{p_{i+q}, p_{j+q}}$, tal que $j = k - (i - 1)$ para $1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ donde $q = n - k$, ver figura 4.10 parte b. Asignemos a la clase cromática c_k con $n + 1 \leq k \leq 2(n - 1)$ las aristas de la forma e_{p_i, p_j} y $e_{q_{i+q}, q_{j+q}}$ tal que $j = k' - (i - 1)$ para $1 \leq i \leq \lfloor k'/2 \rfloor$ donde $k' = k - n + 1$ y $q = n - k'$, ver figura 4.10 parte b.

□

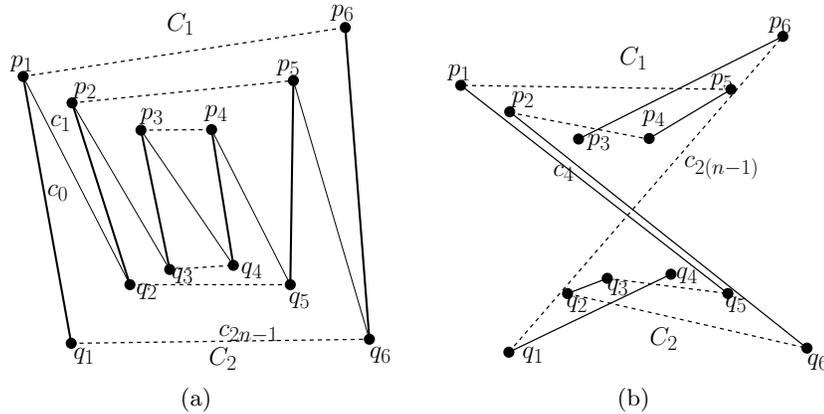


Figura 4.10: Ejemplo de clases cromáticas para una coloración de G

4.3.2. Doble círculo convexo

Decimos que un conjunto de puntos es *doble círculo convexo* [22] si contiene $n/2$ puntos formando un polígono regular P y $n/2$ puntos en el interior de este polígono colocados lo suficientemente cerca de las aristas de P de tal forma que las aristas interiores que no cruzan a ninguna otra arista conforman una región en forma de estrella, sea p un vértice de la gráfica una que incide en p y que además pertenece a la región en forma de estrella es llamada *arista lateral* de p , notemos que cada vértice tiene dos aristas laterales. Dos vértices que son extremos de misma arista lateral son llamados *vecinos laterales*. En la figura 4.11 mostramos un ejemplo de esta estructura, en la cual p_1 y q son vecinos laterales, no así p_1 y p_2 . Una gráfica geométrica cuyo conjunto de vértices corresponde a un doble círculo convexo es llamada *gráfica de tipo doble círculo convexo*, por simplicidad llamamos a estas gráficas doble círculo convexo.

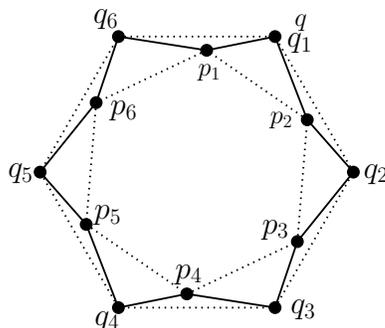


Figura 4.11: Doble círculo convexo

Cota inferior

Lema 9 Sea G una gráfica de tipo Doble círculo convexo con n vértices, con $n \geq 6$ entonces, su índice cromático está acotado por:

$$\chi(G) \geq n.$$

Prueba. Sea C_e el conjunto de puntos en la envoltura convexa de G y sea C_i el conjunto de puntos en el interior de la envoltura convexa de G . Consideremos una etiquetación para los vértices de C_i en el sentido de las manecillas del reloj. Sean los vértices p_1, p_2 vértices de C_i , sea q vecino lateral de ambos, tal como lo muestra la figura 4.12. Etiquetemos los puntos de C_e en el sentido de las manecillas del reloj empezando por el vértice q . Sea

C el ciclo impar definido por los vértices p_1 , p_2 y p_3 , sea T_0 el conjunto de aristas de la forma e_{p_2,p_i} , éstas son $n/2 - 1$ aristas (ver figura 4.12). Sea T_1 el conjunto de aristas de la forma e_{p_2,q_j} para $3 \leq j \leq n/2$ (ver figura 4.12). La unión $T_2 = T_1 \cup T_0$ es un *thrackle*, pues todas estas aristas inciden en p_2 , con $|T_2| = n - 3$. Notemos que la arista e_{p_1,p_3} cruza a todas las aristas de T_2 . Consideremos la arista e_{p_1,q_2} que cruza a todas las aristas de T_2 y además tiene un vértice en común con la aristas e_{p_1,p_3} . Consideremos también la arista e_{p_3,q_1} que cruza a todas las aristas de T_2 y además tiene un vértice en común con la arista e_{p_1,p_3} . Entonces la unión $T = T_2 \cup e_{p_1,p_3} \cup e_{p_1,q_2} \cup e_{p_3,q_1}$ forman un *thrackle* cuyo tamaño es $|T| = n$, es decir. Por tanto en una coloración propia las n aristas de T deben tener colores distintos.

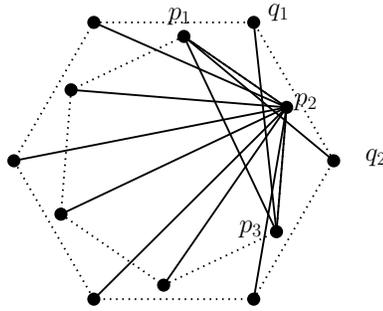


Figura 4.12: *Thrackle* de una gráfica doble círculo convexo

□

Cota superior

Lema 10 Sea G una gráfica de doble círculo convexo con n vértices, con $n \geq 6$ entonces, su índice cromático está acotado por:

$$\chi(G) \leq n.$$

Prueba. Para probar este lema, basta con proporcionar una coloración propia para la gráfica G que use n colores, misma que describimos a continuación.

Se puede ver a C_e como una gráfica completa de tamaño $m = n/2$, que por el lema 6 sabemos que se puede colorear con m colores distintos.

Consideremos una etiquetación para C_i en el sentido de las manecillas del reloj. Consideremos una etiquetación para C_e de la siguiente manera: sea q_1 tal que es un vértice lateral tanto de p_1 como de p_2 , etiquetemos los

demás vértices de C_e a partir de q_1 en el sentido de las manecillas del reloj. Tal como lo muestra la figura 4.13.

Supongamos que C_e está coloreada con $n/2$ colores, asignamos a la arista e_{p_i, p_j} el color asignado a la arista e_{q_{i-1}, q_j} (las operaciones son modulo n). En la figura 4.13 mostramos un ejemplo de un conjunto de aristas que tienen el mismo color.

Las aristas restantes, que son todas las aristas con un extremo en C_i y otro en C_e , las coloreamos de la siguiente manera: Para cada valor de $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$, asignamos a una misma clase cromática las aristas de la forma $e_{q_{i+j}, p_{i-j}}$ y $e_{p_{i+j}, q_{i-j}}$, variando j en el intervalo $0 \leq j \leq \lfloor m/2 \rfloor$. De igual manera asignamos a otra clase cromática las aristas de la forma $e_{q_{i+j}, p_{i-j+1}}$, $e_{p_{i+j+1}, q_{i-j}}$ para esos mismos valores de j e i . Recordemos que las operaciones sobre los índices son modulo $n/2$. En la figura 4.14 mostramos un ejemplo de estas clases, para un valor fijo i .

Si m es impar tenemos una clase más, la cual contiene aristas de la forma $e_{q_{i+j}, p_{i-j}}$, $e_{p_{i+j}, q_{i-j}}$ para un valor único de $i = \lceil n/2 \rceil$ y $0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Esta coloración usa en la primera etapa $n/2$ colores, en la segunda también usa $n/2$ colores, con ellos tenemos una coloración que usa n colores. \square

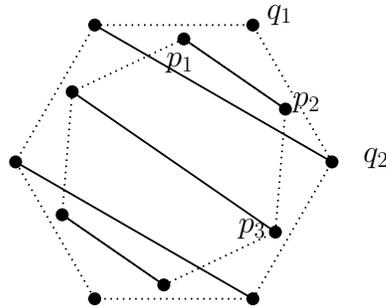


Figura 4.13: Coloración para doble círculo convexo

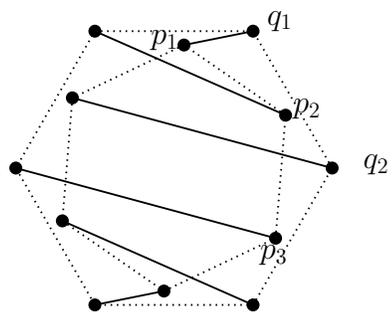


Figura 4.14: Coloración para doble círculo convexo, con $i = 1$

Capítulo 5

Gráficas completas en posición general

En este capítulo damos una cota inferior y una cota superior para el índice cromático de las gráficas geométricas definidas sobre conjuntos de puntos en posición general, utilizando dos conceptos distintos de adyacencia, uno para gráficas de disyunción y otro para gráficas de intersección. Para estas últimas proporcionamos resultados experimentales y mejoramos la cota inferior de su índice cromático geométrico.

5.1. Gráfica de disyunción

En esta sección estudiamos el índice cromático de la gráfica $D(S)$, llamada gráfica de disyunción, la cual definimos de la siguiente manera: sea S un conjunto de puntos en el plano en posición general y $n = |S|$. La gráfica $D(S)$ tiene como conjunto de vértices a todos los subconjuntos de tamaño dos que se pueden formar con los n puntos de S , es decir, las aristas que unen puntos de S . Dos vértices de $D(S)$ que representan a dos aristas e_1 y e_2 de S son adyacentes si y sólo si el e_1 y e_2 son disjuntos.

5.1.1. Cota inferior

A continuación demostramos que el índice cromático de la gráfica $D(S)$, donde S es un conjunto de puntos en posición general con $n = |S|$ está acotado por: $\chi_1(D(S)) \geq n - \lfloor \sqrt{2n+1}/4 - 1/2 \rfloor$, esto lo hacemos demostrando que una coloración propia necesita al menos este número de colores. Para ello demostramos varios lemas y dos teoremas auxiliares (teorema 21 y 22). El

primero de estos dos teoremas es sobre aristas comunes a dos *thrackles* maximales de una gráfica geométrica, y el segundo sobre el número de aristas que hay en la unión de k *thrackles* maximales. El siguiente teorema demostrado en la sección 3 es de suma utilidad para las posteriores demostraciones.

Teorema 19 (P. Erdős [12]) *Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general, sea T un conjunto de segmentos que unen puntos de S y que además se cruzan dos a dos. T contiene a lo más n segmentos.*

Dado que los vértices de una gráfica G son puntos en el plano y que sus aristas son segmentos de recta que unen dichos puntos, el conjunto T del teorema anterior corresponde a un *thrackle* de G ; recordemos que una gráfica es un *thrackle* si todas sus aristas son adyacentes dos a dos. Es decir, un *thrackle* de G tiene a lo sumo tantas aristas como vértices. Un *thrackle* que no es un subconjunto de otro *thrackle* es llamado un *thrackle maximal*. Sea T un *thrackle*, un *ciclo impar* $C(T)$ de T es una gráfica tal que $V(C(T)) \subseteq V(T)$ y $E(C(T)) \subseteq E(T)$ tal que, cada vértice en $V(C(T))$ tiene grado dos. En la figura 5.1 mostramos un ejemplo de ciclo impar.

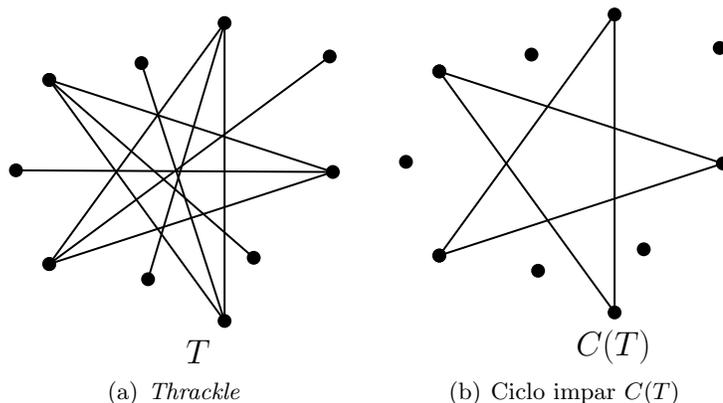


Figura 5.1: *Thrackle* T y su ciclo impar $C(T)$

El siguiente lema caracteriza las gráficas ciclo impar. La prueba a dicho lema es una adaptación de la prueba de un lema más general, ver [20].

Lema 11 *Sea T un thrackle de orden n con n aristas, tal que todos sus vértices tienen grado dos, entonces n es impar.*

Prueba. Dado que todos los vértices de T tienen grado dos, podemos ver a T como la unión (finita) de q ciclos. Supongamos, por contradicción, que n es par. Consideremos los dos casos siguientes:

Primero. Hay al menos dos ciclos de longitud impar (como n es par no podría haber sólo uno), sean $p_1p_2\dots p_{2k+1}$ y $p'_1p'_2\dots p'_{2r+1}$ dichos ciclos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que p'_1 está en el semiplano inferior de la recta p_1p_2 , como $p'_1p'_2$ debe cruzar a p_1p_2 p'_2 debe estar en el semiplano superior determinado por p_1p_2 (ver figura 5.2 parte a). En general, bajo el mismo argumento el punto P'_i está en el semiplano inferior si i es impar, y en el superior si i es par. De esta forma las aristas que corresponden a los segmentos P_1P_2 y $P'_1P'_{2r+1}$ son necesariamente disjuntas, contradiciendo el hecho de que T es un *thrackle*.

Segundo. Todos los ciclos son de longitud par. Sea $p_1p_2\dots p_{2k}$ un ciclo de longitud par. Supongamos que p_3 se encuentra en el semiplano superior determinado por la recta p_1p_2 (ver figura 5.2 parte b). Como en el caso anterior, p_i se encuentra en el semiplano superior si i es impar y se encuentra en el plano inferior si i es par. Por lo tanto p_{2k} se encuentra en el semiplano inferior, por lo que las aristas que corresponden a los segmento p_2p_3 y $p_{2k}p_1$ son disjuntas, contradiciendo el hecho de que T es un *thrackle*. □

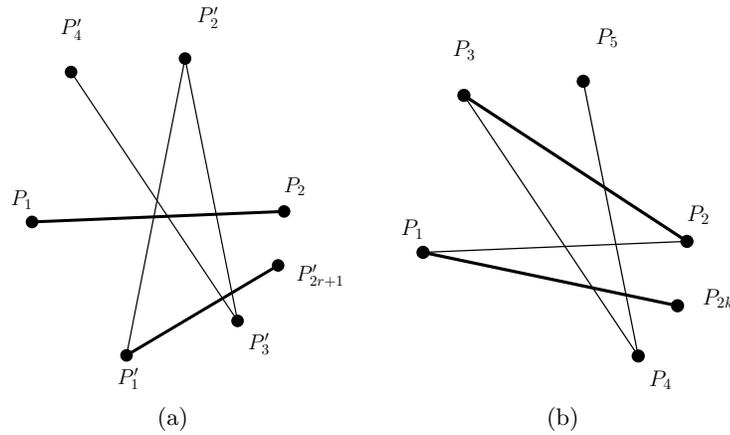


Figura 5.2: Casos para demostrar que n no puede ser par

En [17] los autores demuestran, para una generalización del concepto de *thrackle*, el siguiente teorema. Aquí proporcionamos una demostración alternativa que es válida únicamente para el concepto de *thrackle* que usamos en esta tesis, es decir *thrackle* rectilíneos. Este teorema será utilizado para demostrar el teorema 21.

Teorema 20 Sea G una gráfica geométrica de orden n y sea T un *thrackle*

maximal de G con n aristas. T contiene un ciclo impar $C(T)$.

Prueba. Sea T' el *thrackle* resultante de eliminar de T todos los vértices de grado uno, así como las aristas que inciden en ellos. Sea $n = |T|$ y sea r el número de vértices eliminados, entonces $|T'| = n - r$, además, puesto que eliminamos una aristas por cada vértice, T' tiene $n - r$ aristas. A continuación probamos que los vértices de $C(T)$ tienen grados dos: supongamos que existen en $C(T)$ dos vértices de grado 3 (que exista sólo un vértice de grado tres es imposible), entonces la suma de los grados de los vértices de $C(T)$ es $2(n - r) + 2$, o sea $2(n - r + 1)$, si dividimos entre dos obtenemos el número de aristas en $C(T)$ es decir; $n - r + 1$, con esto hemos llegado a una contradicción puesto que $C(T)$ es un *thrackle* de orden $n - r$, y no puede tener más de este número de aristas. Este argumento implica que cada vértice de $C(T)$ tiene grado dos.

Dado que $C(T)$ es un *thrackle* donde cada uno de sus vértices tiene grado dos, por el lema 11 $C(T)$ tiene orden impar. \square

Sea p un vértice de $C(T)$, definimos una *cuña* $W_T(p)$ como la región acotada por p y sus dos vértices vecinos en $C(T)$, el vértice p es llamado *ápice* de $W_T(p)$ (ver figura 5.3). Notemos que cada vértice de T en el interior de una cuña pertenece a una y sólo una cuña de $C(T)$, los vértices ápice pertenecen a tres cuñas distintas. Un vértice p de $C(T)$ sólo puede ser vértice ápice de una y sólo una cuña $W_T(p)$, en la figura 5.3 ilustramos estos vértices con puntos gordos.

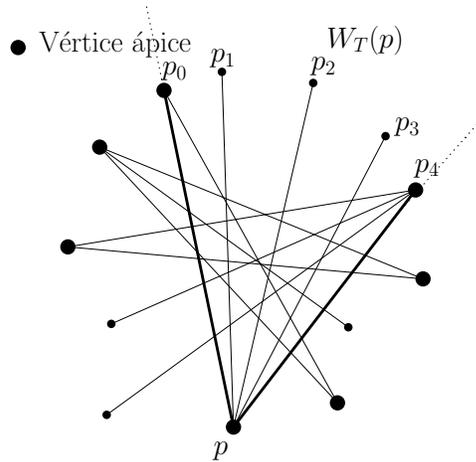


Figura 5.3: *Thrackle* maximal T , con n aristas, y concepto de cuña $W_T(p)$

Los siguientes tres lemas también serán usados en la posterior demostración del teorema 21.

Lema 12 Sean T y T_1 dos *thrackles* maximales de G . Si existe una arista $e_{p,q}$ de T_1 , tal que p y q pertenecen a una misma cuña $W_T(p_c)$ de $C(T)$ entonces: T y T_1 comparten al menos una arista.

Prueba.

Sean T y T_1 dos *thrackles* maximales de G . Sea la arista $e_{p,q}$ de T_1 con p y q en $W_T(p_c)$, tal como lo muestra la figura 5.4. Por el teorema 19 en cada vértice de G incide al menos una arista tanto de T como de T_1 . Consideremos la arista e_{p_x,p_c} de T_1 que incide en p_c (esta arista existe por el teorema 19) la cual debe ser adyacente a $e_{p,q}$, dado que ambas perteneces a T_1 , por tanto existen sólo dos casos: *i*) e_{p_x,p_c} incide en p o en q ; *ii*) e_{p_x,p_c} cruza a la arista $e_{p,q}$. En el caso *i*), sin pérdida de generalidad, podemos suponer e_{p_x,p_c} incide en p (el caso para q es simétrico), entonces dicha arista es de la forma e_{p,p_c} . Observemos que en todo vértice p_i , donde p_i pertenece a la cuña $W_T(p_c)$, incide una arista de T de la forma e_{p_i,p_c} (incluyendo a e_{p,p_c} y e_{q,p_c}), todas estas aristas necesariamente inciden en p_c porque de lo contrario no cruzarían a alguna de las aristas en la frontera de $W_T(p_c)$, entonces e_{p,p_c} pertenece tanto a T como a T_1 (ver figura 5.4); en el caso *ii*), supongamos que e_{p_x,p_c} incide en algún vértice p_i de $W_T(p_c)$, esto ocurre necesariamente dado que $e_{p,q}$ está contenido en $W_T(p_c)$, entonces digamos que esta arista es de la forma e_{p_c,p_i} , como en todo p_i de $W_T(p_c)$ incide una arista de T de la forma e_{p_i,p_c} , entonces la arista e_{p_c,p_i} pertenece tanto a T como a T_1 . \square

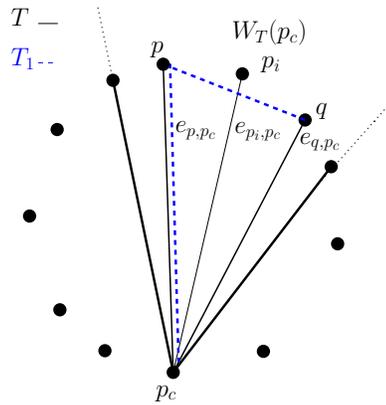


Figura 5.4: Dos *thrackles* maximales T y T_1 que comparten una arista

Lema 13 Sea T_1 y T_2 dos *thrackles* maximales de una gráfica G , sea p_c el vértice ápice de la cuña $W_{T_1}(p_c)$ y q_c el vértice ápice de la cuña $W_{T_2}(q_c)$, tales que p_c pertenece a $W_{T_2}(q_c)$ y q_c pertenece a $W_{T_1}(p_c)$, entonces: T_1 y T_2 comparten al menos una arista.

Prueba. Sea T_1 y T_2 dos *thrackles* maximales de una gráfica G , sea p_c el vértice ápice de la cuña $W_{T_1}(p_c)$ y q_c el vértice ápice de la cuña $W_{T_2}(q_c)$, tales que p_c pertenece a $W_{T_2}(q_c)$ y q_c pertenece a $W_{T_1}(p_c)$. Dado que el vértice p_c pertenece a $W_{T_2}(q_c)$ la arista de T_2 que incide en él tiene la forma e_{p_c, q_c} , tal como lo mostramos en la figura 5.5; luego, como q_c pertenece a $W_{T_1}(p_c)$ entonces la arista de T_1 que incide en él tiene la forma e_{q_c, p_c} , con lo cual, esta arista pertenece tanto a T_1 como a T_2 .

□

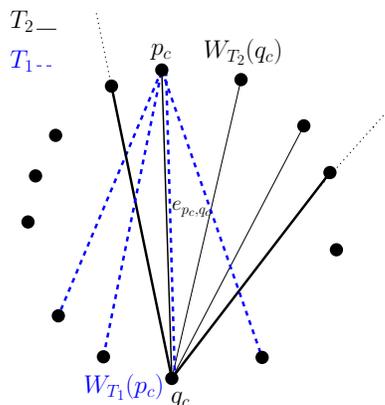


Figura 5.5: Dos *thrackles* maximales T_1 y T_2 que comparten una arista

Lema 14 Sea T un *thrackle* maximal de G y sea $C(T)$ el ciclo impar de T , con $m = |C(T)|$, sea G_0 la gráfica inducida por cualesquiera $\lceil m/2 \rceil$ vértices de $C(T)$, entonces G_0 contiene por lo menos una arista.

Prueba.

Sea T un *thrackle* maximal de G y sea $C(T)$ el ciclo impar de T , con $m = |C(T)|$. Cada uno de los vértices de $C(T)$ tiene grado dos, si alguno tuviera grado uno, entonces $C(T)$ no sería un ciclo; por otra parte, si algún vértice tuviera grado mayor que dos, entonces el número de aristas de $C(T)$ sería al menos $m + 1$, lo cual no puede suceder debido a que $C(T)$ es un

thackle y como tal tiene a los más m aristas (por el teorema 19). De aquí que para $C(T)$ el número de aristas es igual al número de vértices.

Supongamos que G_0 no contiene ninguna arista, entonces todas las aristas que inciden en los $\lceil m/2 \rceil$ vértices de G_0 tienen extremos en $C(T) - G_0$, la suma de los grados de los vértices de G_0 es $2\lceil m/2 \rceil$, como cada uno de sus vértices tiene grado dos, requerimos que $C(T)$ tenga $2\lceil m/2 \rceil$ aristas, al ser m impar tenemos $2\lceil m/2 \rceil > m$, esto implica que $C(T)$ debería tener más de m aristas, lo cual como ya dijimos no es posible (por teorema 19). \square

En la prueba del siguiente teorema demostramos que en la unión de dos *thackles* maximales necesariamente ocurre el caso del lema 12 o bien, el caso del lema 13.

Teorema 21 *Sea G una gráfica geométrica y sean T_1 y T_2 dos *thackles* maximales de G . T_1 y T_2 tienen al menos una arista en común.*

Prueba.

Sean T_1 y T_2 dos *thackles* maximales de G con $m_1 = |C(T_1)|$, $m_2 = |C(T_2)|$, y $k_2 = \lceil m_2/2 \rceil$.

Caso 1: supongamos que al menos k_2 vértices de $C(T_2)$ están contenidos en una cuña $W_{T_1}(p)$ de $C(T_1)$, por el lema 14 existe una arista de T_2 en la cuña $W_{T_1}(p)$ de $C(T_1)$; lo cual corresponde al caso descrito en el lema 12, es decir, T_1 y T_2 comparten una arista. Con lo que el teorema es cierto para este caso.

Notemos que si los m_2 vértices de $C(T_2)$ están contenidos en dos cuñas $W_{T_1}(p)$ y $W_{T_1}(q)$ de $C(T_1)$, entonces en alguna de estas dos cuñas necesariamente debe haber $\lceil m_2/2 \rceil$ vértices de $C(T_2)$.

Caso 2: para este caso es necesario definir tres subconjuntos de los vértices de un ciclo $C(T)$. Sea T y T_1 dos *thackles* maximales de G , para una cuña W_i del ciclo $C(T_1)$ sea p_c su vértice ápice y sean p y q los vecinos de p_c en $C(T)$, ver figura 5.6. Sea p tal que la recta orientada l_p que va de p_c a p deja en su semiplano izquierdo l_p^- al punto q . Sea l_q la recta orientada que va de p_c a q y l_p^+ su semiplano derecho. Se define la región izquierda de W_i como $I_i = C(T) \cap l_q^-$, mientras que la región derecha de W_i es $D_i = C(T) \cap l_p^+$. Los puntos que pertenecen a la cuña W_i , exceptuando a p_c , forman el conjunto R_i . Claro que $I_i \cup D_i \cup R_i = C(T)$.

Etiquetemos los vértices de $C(T_1)$ de la siguiente manera: sea p_1 cualquier vértice de $C(T_1)$ y sean p'_1 y p''_1 sus vecinos en $C(T_1)$, donde p'_1 es tal, que la recta orientada l_1 que va de p_1 a p'_1 deja en su semiplano izquierdo al punto p''_1 , entonces sea p_2 el otro vértice vecino de p'_1 en $C(T_1)$, tal como lo

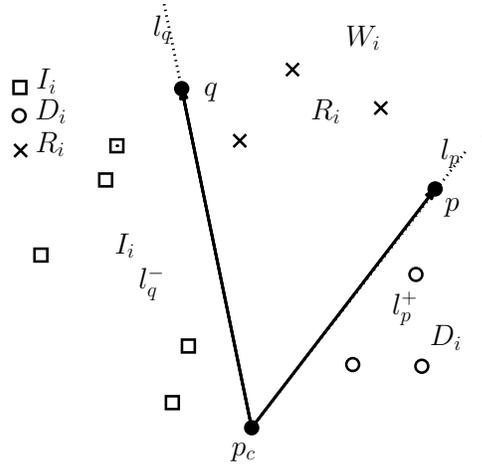


Figura 5.6: Conjuntos I_i , D_i y R_i de una cuña W_i

muestra la figura 5.7, ahora sean p'_2 y p''_2 los vecinos de p_2 y sea p_3 el vértice vecino de p'_2 que no es p_2 , en general tomemos p_i y sean p'_i y p''_i sus vecinos en $C(T_1)$, donde p'_i es tal, que la recta orientada l_i que va de p_i a p'_i deja en su semiplano izquierdo al punto p''_i , entonces sea p_{i+1} el vértice vecino de p'_i en $C(T_1)$ que no es p_i , esto para $1 \leq i < m_1$. Para etiquetar cada cuña de $C(T_1)$ asignamos a cada cuña la etiqueta de su vértice ápice.

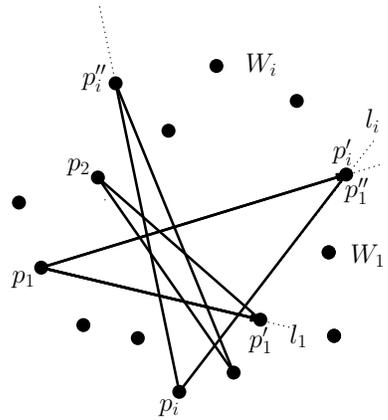


Figura 5.7: Etiquetación de las cuñas de $C(T)$

Para el caso en que los m_2 vértices de $C(T_2)$ estén contenidos en más de tres cuñas de $C(T_1)$, sea I_1 el conjunto de vértices de lado izquierdo de la

uña W_1 de $C(T_1)$, sea D_1 el conjunto de vértices de su lado derecho, y sea R_1 el conjunto de puntos contenidos en la cuña W_1 , donde $I_1 \cup D_1 \cup R_1 = C(T_2)$, tal como lo ilustramos en la figura 5.8.

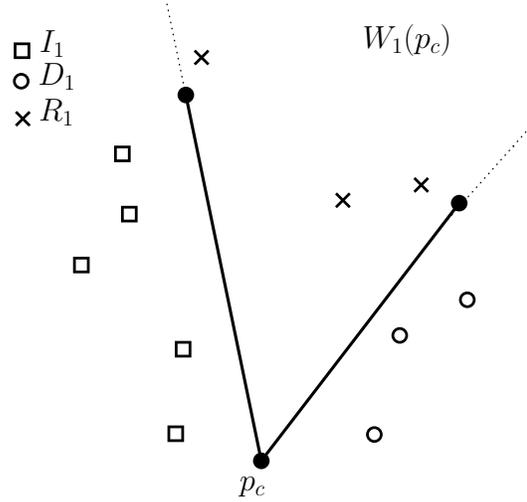
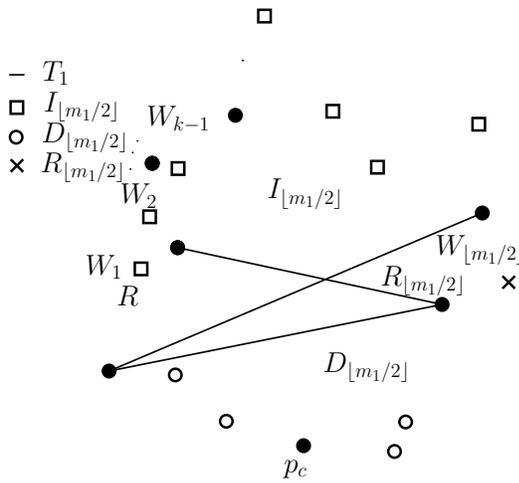


Figura 5.8: Conjuntos I , D y R de una cuña W_1

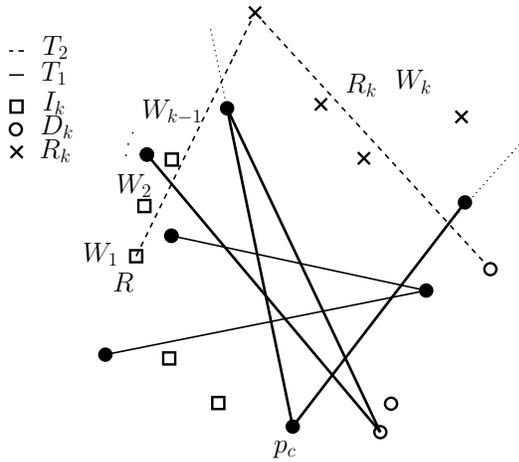
Sean $i = |I_1|$, $d = |D_1|$ y $r = |R_1|$. Si $i + r \geq k_2$ y $d + r \geq k_2$; sea $V_1 = I_1 \cup R'_1$ con $R'_1 \subseteq R_1$, tal que $|V_1| = k_2$, por el lema 14 existe una arista $e_{p,q}$ de T_2 con $p \in R'_1$ y $q \in I_1$. El vértice p debe tener grado dos (cada vértice de $C(T_2)$ tiene grado dos), por tanto la otra arista de T_2 incidente en él, que no es $e_{p,q}$, o bien tiene un extremo en R_1 o bien en D_1 , pero como $d + r \geq k_2$ por el mismo lema 14 dicha arista es de la forma $e_{p,q'}$ con $p \in R_1$ y $q' \in D_1$, para estas dos aristas $e_{p,q}$ y $e_{p,q'}$ que son incidentes tenemos el caso tratado en el lema 13. Por lo que si $i + r \geq k_2$ y $d + r \geq k_2$ el teorema es cierto.

Si la condición anterior no se cumple, sin pérdida de generalidad supongamos que $i + r < k_2$, entonces $d \geq k_2$. Consideremos una etiquetación para las cuñas de $C(T_1)$ en el sentido de las manecillas del reloj empezando por W_1 . Notemos que la cuña $W_{\lfloor m_1/2 \rfloor}$ de T_1 necesariamente cumple $r_{\lfloor m_1/2 \rfloor} + i_{\lfloor m_1/2 \rfloor} \geq k_2$ (ver figura 5.9 parte a), esto porque de lado derecho de W_1 hay igual o más de k_2 vértices ($d \geq k_2$), entonces $r_{\lfloor m_1/2 \rfloor} + i_{\lfloor m_1/2 \rfloor} = r + d \geq k_2$. Sea W_k la primera cuña tal que $r_k + i_k \geq k_2$, siendo k el mínimo entero que cumple esta condición (el vértice ápice de W_k se encuentra de lado izquierdo de la cuña W_1), tal como lo mostramos en la figura 5.9 parte b. Entonces hay una arista de $C(T_2)$ con un extre-

mo en la cuña W_k y el otro en I_k además, como podemos observar en la figura 5.9 parte b, tenemos que $i_k \leq i_{k-1} + r_{k-1}$, el conjunto I_k está conformado por la unión $I_{k-1} \cup R_{k-1}$ menos alguno otros vértices de T_2 . Dado que W_k es la primera cuña que cumple la condición $r_k + i_k \geq k_2$, tenemos que $i_{k-1} + r_{k-1} \leq k_2$, entonces $i_k \leq k_2$, esto obliga a que $r_k + d_k \geq k_2$ con lo que existe una arista de $C(T_2)$ con un extremo en W_k y otro en D_k . Por lo que según el lema 13 T_1 y T_2 tienen una arista en común, con lo que el teorema es cierto.



(a) Cuña $W_{[m_1/2]}$ de T_1



(b) Caso general

Figura 5.9: Caso general donde dos cuñas comparten una arista

□

Teorema 22 *Sea G una gráfica geométrica de orden n , la unión de k thrackles maximales de G tiene a lo más $kn - \binom{k}{2}$ aristas.*

Prueba.

Por el teorema 21 cada par de *thrackles* maximales comparten al menos una arista, si todas las aristas compartidas entre dos *thrackles* fueran diferentes entonces la unión de k *thrackles* maximales tendría un tamaño de $kn - \binom{k}{2}$ aristas, por lo que el teorema es cierto en este caso.

Otro caso es que una arista sea común a tres *thrackles* maximales T_1, T_2, T_3 . Sea $e_{p,q}$ la arista que comparten T_1 y T_2 tal como lo mostramos en la figura 5.10, supongamos que p es el ápice de la cuña $W_{T_1}(p)$ de T_1 y q es el ápice de la cuña $W_{T_2}(q)$ de T_2 . Para que $e_{p,q}$ pertenezca también a T_3 necesariamente deberá incidir en un vértice ápice de alguna cuña $W_{T_3}(p')$ de T_3 , supongamos que p es dicho vértice (la otra opción es que sea q), entonces pueden ocurrir dos casos:

El primero; la cuña $W_{T_3}(p')$ está contenida en $W_{T_1}(p)$ o bien la cuña $W_{T_1}(p)$ está contenida en $W_{T_3}(p')$. Cuando dos cuñas de distintos *thrackles* tienen en común el vértice ápice y una está contenida en la otra, las aristas de que quedan en la intersección de dichas cuñas pertenecen a ambas cuñas, dichas aristas son al menos dos, a saber, las aristas que están en de frontera de cada cuña, en la figura 5.10 mostramos como ejemplo la arista $e_{p,q''}$ es la segunda arista compartida por $W_{T_1}(p)$ y $W_{T_3}(p')$. Si la arista $e_{p,q''}$ perteneciera a T_2 el mismo argumento explicado en este párrafo lo aplicamos tomando $e_{p,q''}$ en lugar de $e_{p,q}$.

El otro caso posible es que la intersección de $W_{T_3}(p')$ y $W_{T_1}(p)$ sea una sola arista, tal como lo muestra la figura 5.11. Este caso T_2 tiene una cuña $W_{T_2}(q)$ con vértice ápice q , mostrados en la figura 5.11. Supongamos que $e_{p,q}$ está en la frontera de $W_{T_2}(q)$, si no lo está no afecta al argumento, y que $W_{T_2}(q)$ está del "lado" de $W_{T_1}(p)$, ver figura 5.11. Entonces q debe ser vértice ápice de alguna cuña $W'_{T_1}(q)$ de T_1 , ello quiere decir que o bien $W_{T_2}(q)$ está contenida en $W'_{T_1}(q)$ o viceversa, que por el argumento del caso anterior estas dos cuñas comparten al menos dos aristas. Sólo falta ver que T_2 y T_3 compartan una arista que no sea $e_{p,q}$; por el teorema 21 T_2 y T_3 deben compartir al menos una arista, recordemos que para esto sólo hay dos casos (correspondientes a los lemas 12 y 13). Si T_2 y T_3 compartieran una arista por el lema 12, ésta no podría ser $e_{p,q}$, debido a que la arista compartida en este lema debe incidir en una cuña de T_2 y a su vez tener una arista incidente de T_3 contenida en esta misma cuña, lo cual para $e_{p,q}$ no es

posible porque la arista de T_3 que incide en p no está del "lado" de $W_{T_1}(p)$; por otra parte si T_2 y T_3 compartieran una arista por el lema 13, las dos cuñas involucradas en el argumento de dicho lema no podrían ser $W_{T_2}(q)$ y $W_{T_3}(p)$ ya que se requiere que el vértice ápice de una esté contenido en la otra y además sus aristas de la frontera se crucen, lo cual no ocurre con $W_{T_2}(q)$ y $W_{T_3}(p)$, por tanto existe otra arista, distinta a $e_{p,q}$ que comparten T_2 y T_3 , notemos que el caso es el mismo para T_1 y T_3 ello implica que existe una arista que no es $e_{p,q}$ compartida por T_1 y T_3 .

Por lo anterior si una arista e es compartida por k *thrackles* maximales, con $k \geq 3$, por cada una de las $\binom{k}{2} - 1$ parejas que comparten la arista e existe una arista más que comparten, descartando la primer pareja, con ello la unión de dichos k *thrackles* maximales contiene $kn - (\binom{k}{2} - 1 + 1)$ aristas, es decir $kn - \binom{k}{2}$, tal como se esperaba. □

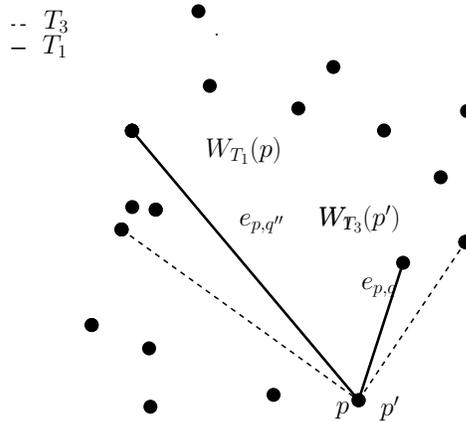


Figura 5.10: Cuñas que comparten al menos dos aristas

Utilizando el teorema anterior demostramos la cota inferior para el índice cromático de la gráfica $D(S)$.

Teorema 23 Sea $D(S)$ una gráfica de disyunción con $n = |S|$, su índice cromático está acotado por:

$$\chi_1(D(S)) \geq \lceil n - \sqrt{2n + 1/4} + 1/2 \rceil.$$

Prueba.

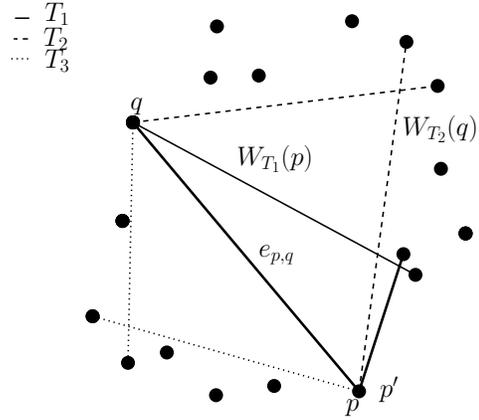


Figura 5.11: Cuñas que comparten al menos dos aristas

Dado que un *thrackle* de G corresponde a un conjunto independiente de vértices en $D(S)$ y viceversa, un *thrackle* maximal de G representa el tamaño máximo que puede tener un conjunto independiente de vértices de $D(S)$, mismos que pueden ser asignados a una misma clase cromática. Claro que lo ideal en una coloración es que todas las clases cromáticas sean de tamaño máximo con el fin de usar el menor número de colores.

Sea T_1 un *thrackle* maximal de G , que en $D(S)$ corresponde a un conjunto de vértice asignados a una clase cromática de tamaño máximo n . La mejor coloración posible tomaría un segundo *thrackle* maximal T_2 tal que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, con el fin de asignar las n aristas de T_2 a una segunda clase cromática, y así sucesivamente hasta cubrir los $n(n-1)/2$ vértices de $D(S)$; sin embargo, T_2 no puede tener n aristas, pues por el teorema 21 cualesquiera dos *thrackle* maximales comparten una arista, por tanto un *thrackle* T_2 que cumpla la condición $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ tiene a lo sumo $n-1$ aristas. Por lo anterior, dada un clase cromática c_1 de $D(s)$ de tamaño máximo, con n vértices, el tamaño máximo que puede tener otra clase cromática c_2 es $n-1$, siguiendo este procedimientos la clase cromáticas c_i tendría $n-(i-1)$ vértices. Esto equivale a una partición del conjunto de vértices en q *thrackles*.

Supongamos que tenemos una partición del conjunto de aristas de G en q *thrackles*, tales que $\sum_1^q |T_i| \geq n(n-1)/2$, donde q es el menor entero que cumple esta condición. Es decir, $\lceil \sum_1^q |T_i| \rceil = n(n-1)/2$, con el fin de tener el menor número de conjuntos T_i . Por el teorema 22 sabemos que $\sum_1^q |T_i| = qn - \binom{q}{2}$. Entonces para saber el valor de q , es decir, cuántos *thrackles* son suficientes para cubrir el número de aristas de G , tenemos que

resolver la siguiente igualdad:

$$qn - \binom{q}{2} = n(n-1)/2.$$

Llevando a cabo las operaciones necesarias obtenemos que

$$q = \lceil n - \sqrt{2n + 1/4} + 1/2 \rceil.$$

Dado que cada *thrackle* de \mathbf{G} es un conjunto independiente de vértices en $D(S)$, necesitamos al menos q colores para colorear $D(S)$, uno por cada *thrackle*.

Supongamos que la partición del párrafo anterior no existe, ello quiere decir que tendríamos al menos $q + 1$ *thrackles*, sin pérdida de generalidad supongamos que dicha partición tiene exactamente $q + 1$ *thrackles*. Existe al menos una arista e del *thrackle* T_{q+1} , que es no adyacente a al menos una arista de cada uno de los *thrackles* restantes, dicho en otras palabras; e no puede ser adyacente a todas las aristas de un *thrackle*, si esta arista no existiera, las aristas de T_{q+1} podrían pertenecer a cualquier otro *thrackle*, con ello tendríamos únicamente q *thrackles*, contrario a la suposición de inicio. Dado que e es no adyacente a por lo menos una arista de cada *thrackle* restante, y supongamos que éstos los hemos coloreado con q colores (con menos es imposible), entonces necesitamos un color adicional para colorear a e , pues en $D(S)$ será adyacente a por lo menos un vértice de cada clase cromática. Ello quiere decir que necesitaríamos $q + 1$ colores para colorear $D(S)$. Con esto demostramos que en una coloración de $D(S)$ necesitamos al menos q colores.

□

5.1.2. Cota superior

En esta sección proporcionamos una cota superior para el índice cromático de la gráfica $D(S)$ dibujada sobre puntos en posición general, para esto utilizamos dos resultados de la literatura; el primero de ellos es sobre el índice cromático de la gráfica $D(S)$ dibujada sobre puntos en posición convexa, el segundo es un teorema de Erdős-Szekeres, ambos resultados los enunciamos a continuación.

En [4] los autores muestran el siguiente teorema para el índice cromático de la gráfica $D(S)$ dibujada sobre puntos en posición convexa.

Teorema 24 *Para $n \geq 3$, tenemos que:*

$$\chi_1(D(S)) = n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor.$$

Teorema 25 *Sea S un conjunto de n puntos en posición general, S contiene un subconjunto S' de puntos en posición convexa, con $|S'| \geq \log n/2$*

Utilizando estos dos resultados demostramos el siguiente teorema.

Teorema 26 *Sea $D(S)$ una gráfica de disyunción dibujada sobre puntos en posición general, su índice cromático está acotado por:*

$$\chi_1(D(S)) \leq n - \lfloor \sqrt{\log n + 1/4} - 1/2 \rfloor.$$

Prueba. Sea $D(S)$ una gráfica de disyunción dibujada sobre puntos en posición general, por el teorema 25 S contiene un subconjunto S' de puntos en posición convexa, tal que $m = |S'| \geq \log n/2$, sea $D(S')$ la subgráfica inducida de $D(S)$, por el teorema 24 podemos colorear $D(S')$ con $m - \lfloor \sqrt{2m + 1/4} - 1/2 \rfloor$ colores. Luego, para cada punto p en S que no está en S' todas las aristas que inciden en p las coloreamos con nuevo color c_p , con lo que garantizamos que la coloración sea propia. El total de colores usados en esta coloración es:

$$(n - m) + m - \lfloor \sqrt{2m + 1/4} - 1/2 \rfloor = n - \lfloor \sqrt{2m + 1/4} - 1/2 \rfloor.$$

Al sustituir m , tenemos que:

$$\chi_1(D(S)) \leq n - \lfloor \sqrt{\log n + 1/4} - 1/2 \rfloor.$$

Tal como queríamos demostrar. □

Cabe señalar que este resultado mejora al ya existen en [3] donde los autores muestran que el índice cromático de la gráfica $D(S)$ dibujada sobre puntos en posición general está acotado por $\chi_1(D(S)) = n + 1/2 - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{2}$.

Aunque en este trabajo no exhibimos la coloración que usa a lo más $n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor$ colores para la gráfica $D(S)$ en posición convexa, a continuación mostramos algunas instancias coloreadas con dicho número de colores.

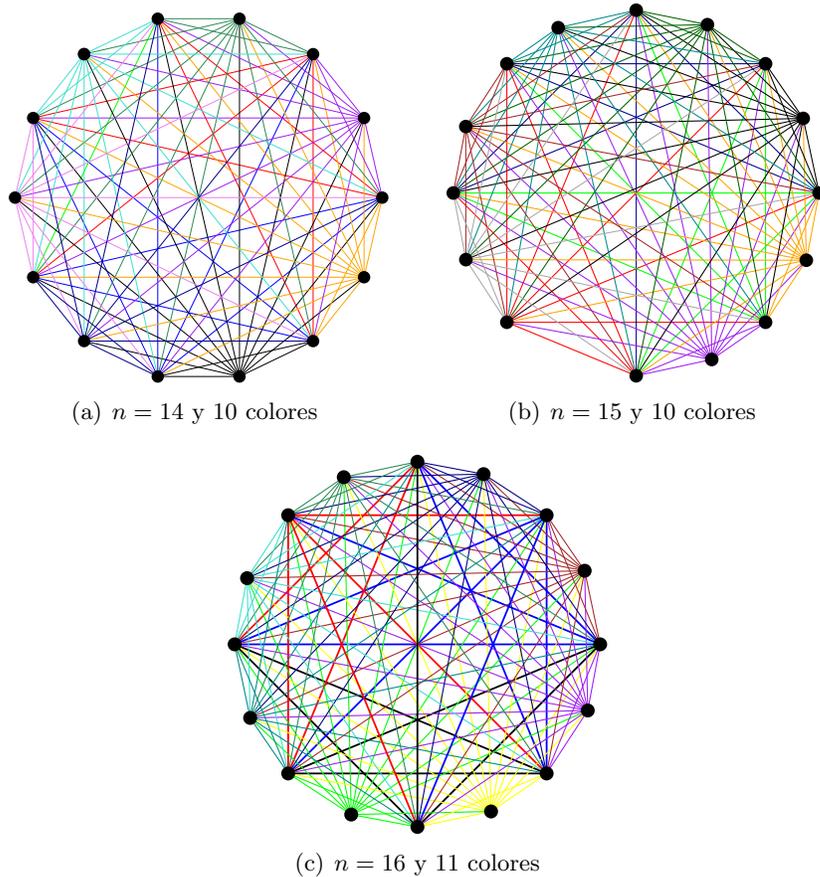


Figura 5.12: Instancias de gráficas $D(S)$ coloreadas con $n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor$ colores

La siguiente coloración es mostrada parcialmente debido a las limitaciones gráficas, en la figura 5.13 parte a, mostramos las clases cromáticas de tamaño 32 a 24. En la parte b de la misma figura mostramos las clases cromáticas de tamaño 16 a 9 más una clase cromática de tamaño 4.

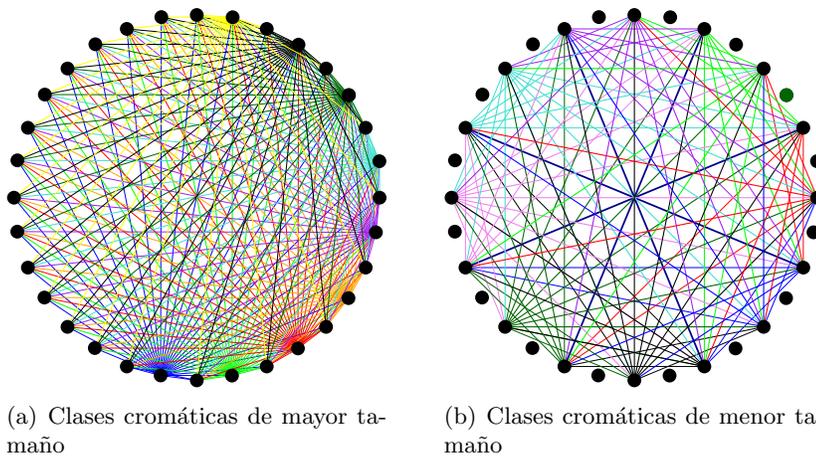


Figura 5.13: Gráficas $D(S)$ de orden $n = 32$ coloreada con 25 colores

De las coloraciones propias halladas en particular, podemos extraer algunas propiedades de que en general son válidas para cualquier coloración de la gráfica $D(S)$ en posición convexa que use a lo más $n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor$ colores, por ejemplo: notamos que pares de aristas adyacentes en el cierre convexo de la gráfica deben pertenecer en una misma clase cromáticas, en general aristas *cortas* e incidentes es preferible que estén en la misma clase cromática, por cada dos clases cromáticas es preferible que haya una sola arista que pueda pertenecer a ambas clases. Hemos observado que las coloraciones propias suelen ser simétricas.

5.2. Gráfica de intersección

Para la gráfica G de orden n deseamos hallar su $\chi_g(G)$. Dicho en otras palabras, consideremos el conjunto de $\chi_1(\mathbb{G})$ de todas las posibles gráficas geométricas que podemos dibujar con n puntos, lo que queremos saber es: cuál es el máximo de estos $\chi_1(\mathbb{G})$, valor que es conocido como el índice cromático geométrico de la gráfica. Respecto a este problema hallamos resultados de manera computacional para gráficas de orden a lo más 6. Para lo cual implementamos dos algoritmos de búsqueda exhaustiva para hallar coloraciones propias de gráficas geométricas. Es importante aclarar que nuestro objetivo principal no es el diseñar algoritmos eficiente, sino hallar coloraciones propias, ya que diseñar un algoritmo eficiente para este tipo de problema, si es que dicho algoritmo existe, hubiera llevado mucho más

tiempo. La implementación de estos algoritmos se hizo en lenguaje C compilados con gcc de Linux versión 4.8.1 20130909 , y están disponibles en: <http://computacion.cs.cinvestav.mx/~cmatias/Tesis/Algoritmos.html>

5.2.1. Algoritmo 1

Este algoritmo está basado en la conjetura de que una gráfica geométrica en posición general de orden n se puede colorear con n colores (en general esta conjetura es falsa). Lo que hacemos es una búsqueda de coloraciones propias que tengan exactamente n clases cromáticas. Si n es par, buscamos $n/2$ clases cromáticas de tamaño $k = n/2 - 1$ y $n/2$ clases cromáticas de tamaño $k' = n/2$. Si n es impar buscamos n clases cromáticas de tamaño $k = (n-1)/2$. Esta distribución en cuanto al tamaño de las clases cromáticas está basada únicamente en la experiencia, claro que no tendría por qué ser cierta para toda n .

A groso modo, el algoritmo genera una coloración tomando un subconjunto de aristas de tamaño k , que corresponde a una clase cromática, de las $m - k$ aristas restantes tomamos un subconjunto de tamaño k , que corresponde a otra clase cromática, y así hasta tener las n clases cromáticas si n es impar, y $n/2$ clases si n es par, en cuyo caso el algoritmo sigue tomando subconjuntos de tamaño k' hasta completar las n clases cromáticas de la coloración. Posteriormente verificamos que en cada clase cromática no haya una par de aristas adyacentes, si esto ocurre la coloración no es propia por lo que la desechamos y repetimos el proceso, en caso contrario la almacenamos en un arreglo de resultados.

De esta forma el número de coloraciones N_c a verificar es el siguiente. Si n es impar:

$$N_c = \binom{m}{k} * \binom{m-k}{k} * \dots * \binom{m-(n-1)k}{k}.$$

Si n es par, sea $q = m - (n/2)k$:

$$N_c = \binom{m}{k} * \binom{m-k}{k} * \dots * \binom{m-(n/2-1)k}{k} * \binom{q}{k'} * \binom{q-k'}{k'} * \dots * \binom{q-(n/2-1)k'}{k'}.$$

En la figura 5.14 mostramos una impresión de pantalla del programa, para una gráfica de orden 6, el parámetro $k = 6$ indica que el programa buscará coloraciones con exactamente 6 clases cromáticas. El conjunto de puntos

el número de coloraciones que a verificar, tomamos en cuenta que la primera arista puede pertenecer a cualquiera de las n' clases, la segunda arista también puede pertenecer a cualquiera de las n' clases, y así para las m aristas de la gráfica. Esto da un total de n'^m coloraciones posibles. Dado que el número de coloraciones a verificar es exponencial respecto al número de puntos de la gráfica, este programa es sumamente lento, de hecho es inviable para gráficas de orden mayor a siete. Sin embargo tiene la ventaja de que no depende de ninguna conjetura acerca de la coloración buscada.

En la figura 5.15 mostramos una impresión de pantalla del programa, para una gráfica de orden 6, el parámetro $k = 6$ indica que el programa buscará coloraciones con a lo más 6 clases cromáticas. El conjunto de puntos de entrada es: (5, 240), (253, 136), (194, 131), (63, 182), (101, 83), (65, 15). En la figura 5.20 parte c, mostramos la gráfica geométrica correspondiente a este conjunto de puntos.

```

constantino@linux-k9h4.site:...ocumentos/Maestria
Parametros de entrada:
n = 6, k = 6, m = 15
Aristas
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 |*| 1 2 3 4 5 6 Col. propia
1 2 6 4 5 1 6 2 4 3 5 4 3 2 1 |*| 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 2 6 4 5 1 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 2 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
1 2 5 4 6 1 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 2 5 4 6 1 6 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 2 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 1 6 4 1 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 2 5 4 1 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 2 1 1 6 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 2 1 4 6 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 2 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 1 5 4 1 6 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 2 5 4 1 6 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 5 1 1 4 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
1 6 2 4 6 1 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 3 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 6 2 4 6 1 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 2 3 3 3 3 3 2 2 SI -> X = 6
3 1 2 4 1 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 3 3 3 3 3 3 0 0 SI -> X = 5
6 1 2 4 1 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 3 3 1 SI -> X = 6
3 1 6 4 1 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 3 3 3 3 3 3 3 3 1 SI -> X = 6
3 1 2 6 1 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 3 3 1 SI -> X = 6
3 1 6 6 1 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 6 1 1 6 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 6 1 4 6 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 2 4 6 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
1 6 2 4 6 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 2 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 6 2 4 6 5 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 1 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
1 1 2 4 1 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 2 4 1 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 3 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 1 2 4 1 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 6 4 1 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 6 4 1 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 2 6 4 1 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 2 1 1 6 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 2 4 6 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 2 4 1 6 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
1 6 2 4 4 5 1 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 6 2 4 4 5 1 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 2 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 6 2 4 4 5 1 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 2 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 2 4 4 1 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 2 4 1 6 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 5 4 1 6 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 2 4 4 5 6 2 2 4 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
1 1 2 4 6 5 1 4 4 2 2 5 3 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 1 6 6 1 4 4 4 2 2 5 3 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 2 6 6 1 4 4 4 2 2 5 3 3 5 4 3 2 2 1 |*| 1 3 3 3 3 3 2 2 2 SI -> X = 6
3 2 1 1 5 4 4 4 2 2 5 3 3 5 4 3 2 2 1 |*| 3 3 0 0 0 0 SI -> X = 6
6 2 1 1 5 4 4 4 2 2 5 3 3 5 4 3 2 2 1 |*| 3 3 3 3 3 3 1 SI -> X = 6

```

Figura 5.15: Algoritmo 2

5.2.3. Resultados

Como ya lo mencionamos, para determinar el índice cromático geométrico de una gráfica de orden n es necesario determinar el índice cromático de cada gráfica geométrica del mismo orden. Sin embargo, existen familias de gráficas geométricas que tienen el mismo índice cromático para una n dada. En [19] los autores proporcionan una clasificación de estas familias para $n \leq 10$. Como todas las gráficas de una misma familia tienen el mismo índice cromático, basta con hallar este valor para una gráfica por cada familia, y luego tomar el máximo de todos estos valores.

Para $n = 3$, solamente existe una familia de gráficas. En la figura 5.16 mostramos un ejemplo de dicha familia exhibiendo una coloración para la misma. En este caso $\chi_1(\mathbb{G}) = 3$, por lo que $\chi_g(G) = 3$.

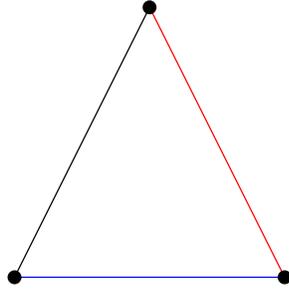


Figura 5.16: Ejemplo de cada familia de gráficas geométricas para $n = 3$ con $\chi_1(\mathbb{G}) = 3$

Para $n = 4$, existen dos familias G_1 y G_2 . En la figura 5.17 mostramos un ejemplo de dichas familias exhibiendo una coloración para cada una. En este caso $\chi_1(\mathbb{G}_1) = 3$ y $\chi_1(\mathbb{G}_2) = 4$, por lo que $\chi_g(G) = 4$.

Para $n = 5$, existen tres familias G_1 , G_2 y G_3 . En la figura 5.18 mostramos un ejemplo de dichas familias exhibiendo una coloración para cada una. Mediante el algoritmo 1 encontramos que $\chi_1(\mathbb{G}_1) = 5$, $\chi_1(\mathbb{G}_2) = 5$ y $\chi_1(\mathbb{G}_3) = 5$, por lo que $\chi_g(G) = 5$.

Para $n = 6$, existen dieciséis familias G_i con $1 \leq i \leq 16$. En este caso el algoritmo 1 encontró coloraciones propias que usan n colores para trece de las dieciséis familias que existen. En la figura 5.19 mostramos cuatro ejemplos de dichas familias con $\chi_1(\mathbb{G}) = 6$, exhibiendo una coloración para cada una. Para los dos casos restantes utilizamos el algoritmo 2, con el que determinamos que existe una familia con $\chi_1(\mathbb{G}) = 5$ y dos familias con $\chi_1(\mathbb{G}) = 7$, por lo que $\chi_g(G) = 7$, en la figura 5.20 mostramos las dos familias con $\chi_1(\mathbb{G}) = 7$.

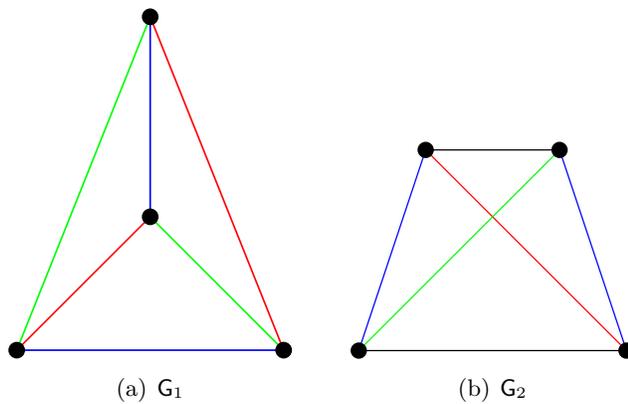


Figura 5.17: Ejemplo de cada familia de gráficas geométricas para $n = 4$ con $\chi_1(G) = 4$

En síntesis, con base en los experimentos computacionales hemos demostrado los siguientes resultados:

Para $3 \leq n \leq 5$

$$\chi_g(G) = n.$$

Para $n = 6$

$$\chi_g(G) = n + 1.$$

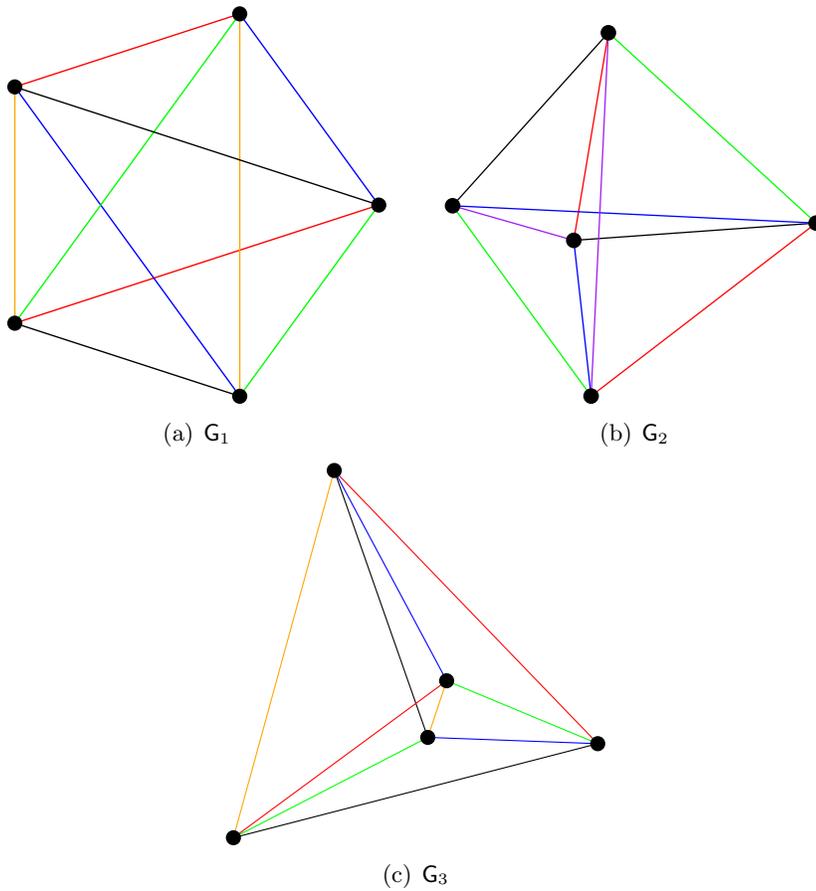


Figura 5.18: Ejemplo de cada familia de gráficas geométricas para $n = 5$ con $\chi_1(G) = 5$

5.2.4. Cota inferior para χ_g cuando n es par

En esta sección proporcionamos una cota inferior para el χ_g de gráficas de orden n , con n par. Dicha cota la demostramos en dos casos, el caso en el que $n = 2q$ con $q \geq 3$ e impar, y el caso en el que $n = 2(q + 1)$ con $q \geq 3$ e impar. El teorema siguiente considera el primer caso, mientras que el teorema 28 considera el segundo caso.

Teorema 27 *Sea $n = 2q$ con $q \geq 3$ e impar, existe una gráfica geométrica G_g de orden n que necesita al menos $n + 1$ colores en una coloración propia.*

Prueba. Sea S un conjunto de puntos en posición convexa formando

los vértices de un polígono regular, con $|S| = 2q - 1$. Consideremos una etiquetación en el sentido de las manecillas del reloj para los puntos de S , sea p un punto dentro de la región acotada por los segmentos de recta de la forma (p_i, p_j) con $p_i, p_j \in S$, tales que $|i - j| = q - 1$, tal como se observa en la figura 5.21 parte a. Sea G_g la gráfica completa con $V(G_g) = S \cup \{p\}$. Sea T el conjunto de aristas de G_g de la forma e_{p_i, p_j} con $p_i, p_j \in S$, tales que $|i - j| = q - 1$. Nótese que estas aristas forman un ciclo impar que a su vez es un *thrackle* de G_g . Notemos que cada arista de T aísla a un número impar de punto de G_g , pues entre los puntos p_i y p_j hay exactamente $q - 2$ puntos por una lado y q puntos por el otro. Sea e_i una arista de T sea C_i , la clase cromáticas a la que pertenece en una coloración propia, dado que e_i aísla a un número impar de puntos de G_g la clase cromática C_i tiene tamaño a lo más $q - 1$ (el tamaño máximo que puede tener un emparejamiento con $2q$ puntos es q). Cada par de aristas e_i, e_j en T no pueden pertenecer a la misma clase cromática, puesto que se cruzan, de aquí que las clases cromáticas C_i y C_j no pueden ser la misma, esto ocurre para cada par de aristas de T (ver figura 5.21 parte a). O sea, por cada una de las $2q - 1$ aristas de T es necesaria una clase cromática de tamaño a lo más $q - 1$, de aquí que en cualquier coloración propia para G_g existen al menos $2q - 1$ clases cromáticas de tamaño a lo más $q - 1$. Sea $m' = ((2q)(2q - 1))/2 - (2q - 1)(q - 1)$ el número de aristas restantes, es decir $m' = 2q - 1$. Supongamos que estas aristas pueden pertenecer a clases cromáticas de tamaño máximo q , con el fin de usar el mínimo número de colores, entonces se requieren $\lceil (2q - 1)/q \rceil \geq 2$ clases cromáticas para colorear estas aristas. Por lo que en total, cualquier coloración propia para G_g necesita al menos $(2q - 1) + 2$ colores, es decir $2q + 1 = n + 1$ colores. \square

Teorema 28 *Sea $n = 2(q + 1)$ con $q \geq 3$ e impar, existe una gráfica geométrica G_g de orden n que necesita al menos $n + 1$ colores en una coloración propia.*

Prueba. Sea S un conjunto de puntos en posición convexa formando los vértices de un polígono regular, con $|S| = 2q - 1$. Consideremos una etiquetación en el sentido de las manecillas del reloj para los puntos de S , sean p'_1, p'_2 y p'_3 puntos dentro de la región acotada por los segmentos de recta de la forma (p_i, p_j) con $p_i, p_j \in S$, tales que $|i - j| = q - 1$. Sea G_g la gráfica completa con $V(G_g) = S \cup \{p'_1, p'_2, p'_3\}$. Sea T el conjunto de aristas de G_g de la forma e_{p_i, p_j} con $p_i, p_j \in S$, tales que $|i - j| = q - 1$, tal como se observa en la figura 5.21 parte b. Notemos que estas aristas forman un

ciclo impar que a su vez es un *thrackle* de G_g . Notemos que cada arista de T aísla a un número impar de punto de G_g con $2q - 1$ aristas, pues entre los puntos p_i y p_j hay exactamente $q - 2$ puntos por una lado y q puntos por el otro. Sea e_i una arista de T sea C_i la clase a la que pertenece en una coloración propia, dado que e_i aísla a un número impar de puntos de G_g , la clase cromática C_i tiene tamaño a lo más q (el tamaño máximo que puede tener un emparejamiento con $2(q + 1)$ puntos es $q + 1$). Cada par de aristas e_i, e_j en T no pueden pertenecer a la misma clase cromática, puesto que se cruzan, de aquí que las clases cromáticas C_i y C_j no pueden ser la misma, esto ocurre para cada par de aristas de T (ver figura 5.21 parte b). O sea, por cada una de las $2q - 1$ aristas de T es necesaria una clase cromática de tamaño a lo más q , de aquí que en cualquier coloración propia para G_g existen al menos $2q - 1$ clases cromáticas de tamaño a lo más q . Sea $m' = ((2(q + 1))(2(q + 1) - 1))/2 - (2q - 1)(q)$ el número de aristas restantes, es decir $m' = 4q + 1$. Supongamos que estas aristas pueden pertenecer a clases cromáticas de tamaño máximo $q + 1$, con el fin de usar el mínimo número de colores, entonces se requieren $\lceil (4q + 1)/(q + 1) \rceil \geq 4$ clases cromáticas para colorear estas aristas. Por lo que en total, cualquier coloración propia para G_g necesita al menos $(2q - 1) + 4$ colores, es decir $2(q + 1) + 1 = n + 1$ colores. \square

Teorema 29 *Sea G una gráfica de orden n , con $n \geq 6$ par, su $\chi_g(G)$ está acotado por:*

$$\chi_g(G) \geq n + 1.$$

Prueba. Si $n = 2q$ con q impar, por el teorema 27 existe una gráfica G_g de orden n , con $\chi_1(G_g) \geq n + 1$ por lo que $\chi_g(G) \geq n + 1$. Si $n = 2q$ con q par, por el teorema 28 existe una gráfica G_g de orden n , con $\chi_1(G_g) \geq n + 1$ por lo que $\chi_g(G) \geq n + 1$. \square

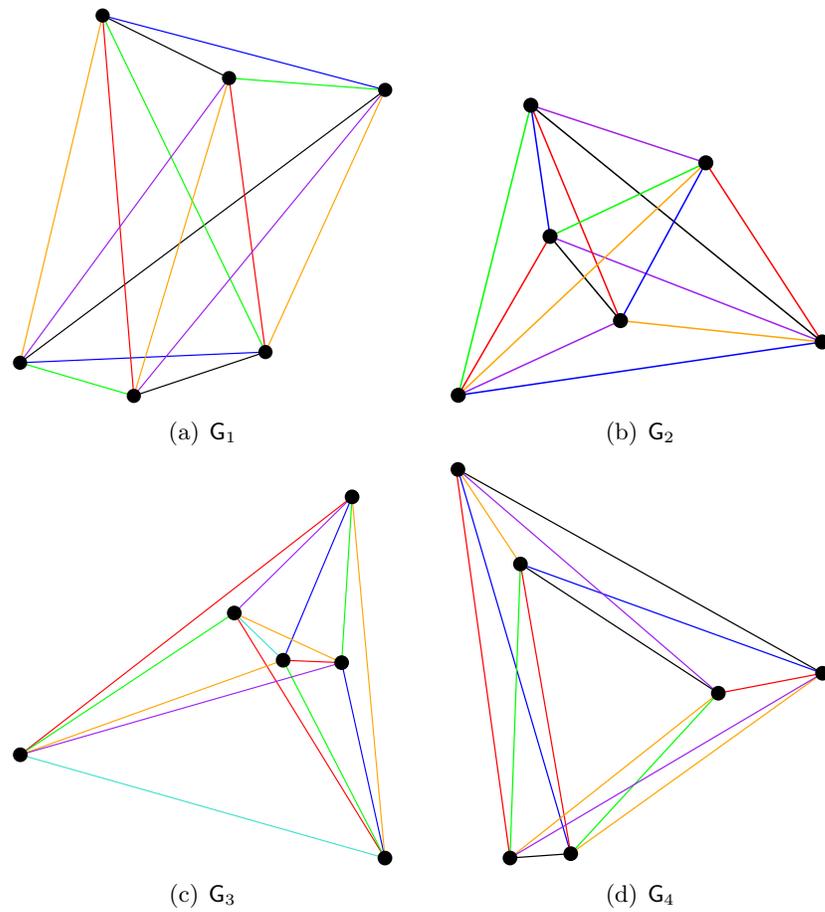


Figura 5.19: Ejemplos de familias de gráficas geométricas para $n = 6$ con $\chi_1(G) = 6$

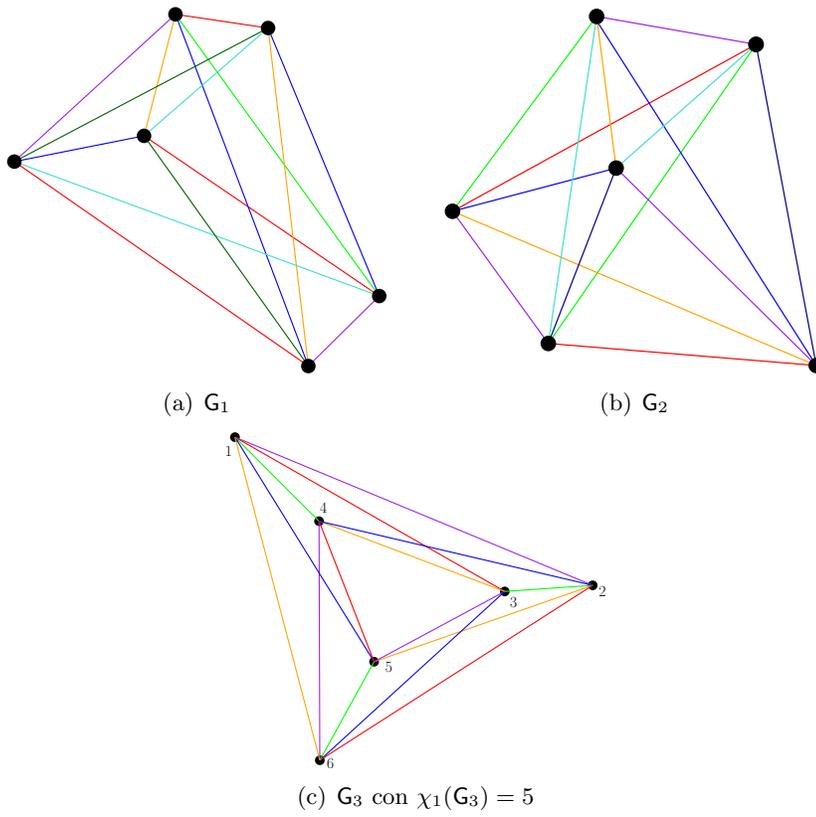


Figura 5.20: Familias de gráficas geométricas para $n = 6$ con $\chi_1(G) = 7$ y $\chi_1(G) = 5$

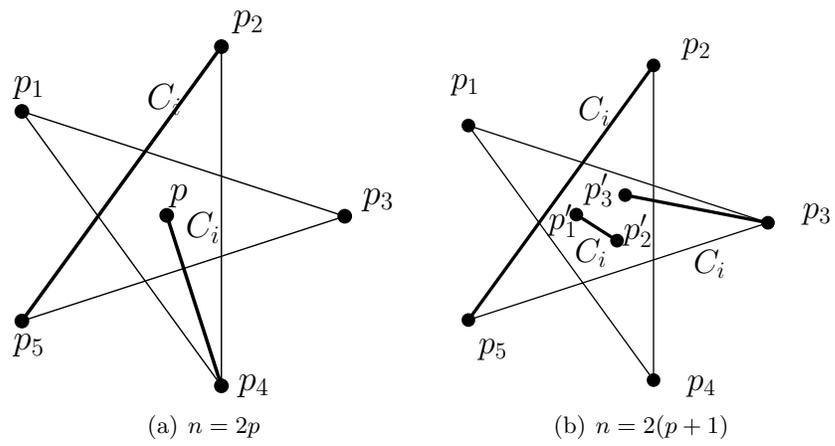


Figura 5.21: Clases cromáticas de tamaño $n/2 - 1$

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo estudiamos el índice cromático de gráficas geométricas y hemos mejorado resultados como: la cota superior y la cota inferior para el índice cromático de gráficas de disyunción dibujadas sobre puntos en posición general, y la cota inferior para el índice cromático geométrico de gráficas de intersección. Además, dimos resultados nuevos, tales como: una cota inferior y una cota superior para el índice cromático de gráficas bipartitas en posición convexa, y el valor exacto del índice cromático de gráficas doble cadena convexa y doble círculo convexo.

De esta experiencia puedo observar que es recomendable estudiar gráficas de orden par y de orden impar por separado, debido a que por lo general tienen propiedades distintas. Notamos que una búsqueda exhaustiva no es viable para hallar coloraciones propias en gráficas geométricas debido al orden exponencial del número de posibles coloraciones. Por tanto es necesario hallar maneras eficientes de buscar coloraciones propias. Una posible manera de hacer esto es restringiendo el espacio de búsqueda, por ejemplo, las aristas que inciden en un vértice necesariamente deben tener colores distintos, por lo que las coloraciones en las que no ocurra esto no tendrían que probarse. Las coloraciones que tengan al menos una clase cromática de tamaño mayor que la mitad de los vértices de la gráfica no son propias, por lo que quedan descartadas como posibles soluciones, esta es otra restricción posible. Además, notamos que los algoritmos usados podrían paralelizarse, dado que el verificar si una coloración es o no propia, no depende de las pruebas anteriores. Paralelizar los algoritmos mejoraría considerablemente el tiempo de ejecución de los programas. No obstante, los resultados hallados compu-

tacionalmente, a pesar de ser costosos en tiempo, son útiles pues a través de las soluciones obtenidas para ciertas instancias en particular, podemos caracterizar o inferir algunas propiedades de coloraciones en general.

En cuanto al trabajo futuro sería interesante proporcionar el valor exacto del índice cromático para gráficas bipartitas en el caso en el que el orden de la gráfica es un número par (creemos que tiene el mismo valor que en el caso impar). Otro problema importante, y que de hecho estudiamos, es exhibir una coloración propia para la gráfica de disyunción construida a partir de puntos en posición convexa, que use $n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor$ colores. Además sería interesante saber si dicha cota es justa, o de lo contrario, mejorarla; nosotros creemos que se puede mejorar. Respecto al índice cromático geométrico queda por mejorar la cota inferior para gráficas de orden impar y de ser posible mejorarla para n par. En cuanto a coloraciones de las gráficas de intersección, sería de gran utilidad caracterizar las gráficas de orden n con el mismo índice cromático y distinta estructura combinatoria, esto ayudaría en la búsqueda del índice cromático geométrico. Otro problema que sería interesante, es determinar el número de k -coloraciones propias, combinatoriamente distintas ¹ que puede tener una gráfica de intersección. En esta tesis observamos que existen gráficas que admiten varias k -coloraciones propias, esencialmente diferentes.

En lo personal he aprendido que para obtener resultados para gráficas geométricas es necesario relacionar dos áreas de las matemáticas: la teoría de gráficas, y la geometría en el plano, en particular los problemas sobre conjuntos finitos de puntos. Además, esta tesis me ha servido para adquirir experiencia en la resolución de problemas combinatorios, y para ser consciente de la dificultad que hay en tratar este tipo de problemas. Cabe señalar que debemos ser muy precavidos al trabajar con gráficas geométricas, ya que éstas suelen ser impredecibles y difíciles de caracterizar. Así, instancias que podríamos pensar que tienen soluciones muy parecidas llegan a tener soluciones muy distintas. En muchas ocasiones creemos haber caracterizado las soluciones para una cierta familia o encontramos ciertas propiedades que parecería podemos generalizar, y sin embargo no es así. Sin duda este trabajo me ha sido muy gratificante.

¹Con coloraciones combinatoriamente distintas nos referimos a coloraciones que a pesar de tener el mismo número de clases cromáticas el tamaño de las clases cromáticas no es el mismo, por ejemplo, si una k -coloración \mathcal{C} tiene clases cromáticas de tamaño x y una k -coloración \mathcal{C}' no tiene clases cromáticas de tamaño x , entonces \mathcal{C} y \mathcal{C}' son combinatoriamente distintas

Bibliografía

- [1] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf (1997). *Computational Geometry: Algorithms and application*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [2] R. Diestel (2000). *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [3] G. Araujo, A. Dumitrescu, F. Hurtado, M. Noy, and J. Urrutia (2005). *On the chromatic number of some geometric type Kneser graphs*. Computational Geometry, 32(1):59-69.
- [4] R. Fabila-Monroy, and D. R. Wood (2012). *The chromatic number of the convex segment disjointness graph*. In Computational Geometry. Springer Berlin Heidelberg.
- [5] O. Aichholzer, O. G. Araujo-Pardo, N. García-Colín, T. Hackl, D. Lara, C. Rubio-Montiel, and J. Urrutia (2015). *Geometric achromatic and pseudoachromatic indices*. Graphs and Combinatorics,1-21.
- [6] J. Basch, J. Erickson, L. J. Guibas, J. Hershberger, and L. Zhang, (2004). *Kinetic collision detection between two simple polygons*. Computational Geometry, 27(3), 211-235.
- [7] R. Wu, Z. Tang, and H. Deng (2013). *A lower bound for the harmonic index of a graph with minimum degree at least two*. Filomat, 27(1):51-55.
- [8] F. Galvin (1995). *The list chromatic index of a bipartite multigraph*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 63(1):153-158.
- [9] M. Plantholt (2013). *A combined logarithmic bound on the chromatic index of multigraphs*. Journal Of Graph Theory.73(3):239-259.
- [10] I. Holyer (1981). *The NP-completeness of edge-coloring*. SIAM Journal on Computing, 10(4):718-720.

- [11] J. D. Horton(1983). *Sets with no empty convex 7-gons*. Canad. Math. Bull., 26(4):482-484.
- [12] P. Erdős(1946). *On Sets of Distances of n Points*. The American Mathematical Monthly, 53(5):248-250.
- [13] G. Tóth(1999). *Note on geometric graphs*, DIMACS Technical Report 99-17.
- [14] A. García, M. Noy, and J. Tejel (2000). *Lower bounds for the number of crossing-free subgraphs of K_n* . Comput. Geom., 16(2):211-221.
- [15] A. Asinowski(2015). *The number of non-crossing perfect plane matchings is minimized (almost) only by point sets in convex position*, arXiv:1502.05332v1 [cs.CG].
- [16] G. Károlyi, J. Pach and G. Tóth (1997). *Ramsey-Type Results for Geometric Graphs*, Discrete Comput Geom 18:247-255.
- [17] G. Cairns and Y. Nikolayevsky (2000). *Bounds for generalized thrackles*. Discrete Comput. Geom., 23(2):191-206.
- [18] J. Jonsson (2011). *The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph*.
- [19] A. Oswin, A. Franz, and K. Hannes (2002). *Enumerating order types for small point sets with applications*. Order, 19:265-281. doi:10.1023/A:1021231927255.
- [20] B. M. Ábrego Lerma (1997). *Problemas combinatorios sobre conjuntos finitos de puntos*. Aportaciones Matemáticas, D.F. México.
- [21] A. García, M. Noy, J. Tejel. *Lower bounds for the number of crossing-free subgraphs of K_n*
- [22] O. Aichholzer, F. Hurtado, M. Noy (2004). *A lower bound on the number of triangulations of planar point sets* Computational Geometry. 29: 135-145.