



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

# Número de Grundy para la gráfica de intersección de triángulos

TESIS QUE PRESENTA

**Ana Belem Juárez Méndez**

PARA OBTENER EL GRADO DE

**Maestra en Ciencias**

**en Computación**

DIRECTORA DE LA TESIS

**Dra. María Dolores Lara Cuevas**

CIUDAD DE MÉXICO

OCTUBRE, 2016



# Resumen

Un triángulo está determinado por tres vértices y tres aristas que unen dichos vértices. La *gráfica de intersección de triángulos* es una gráfica definida a partir de un conjunto de triángulos abiertos (es decir triángulos que no incluyen su frontera), donde cada vértice representa a un triángulo del conjunto, y existe una arista entre dos vértices si y sólo si los triángulos correspondientes se intersectan. El conjunto de triángulos abiertos está determinado por un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general. Una *coloración de Grundy* de los vértices de una gráfica consiste en que cada par de vértices adyacentes tenga color distinto, y además cada vértice sea adyacente con al menos un vértice de cada color más pequeño que el suyo. El problema que estudiamos en esta tesis es encontrar el máximo número  $k$  de colores para el cual la gráfica de intersección de triángulos tiene una coloración de Grundy usando  $k$  colores. A este valor lo denominamos como el *número de Grundy* de la gráfica de intersección de triángulos.

En este trabajo de tesis, damos cotas para el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos. Además del número de Grundy, estudiamos otros parámetros para la gráfica de intersección de triángulos: su grado máximo y el tamaño del conjunto con número máximo de triángulos que se intersectan dos a dos y cuya intersección total es vacía. Construimos un programa que realiza coloraciones de Grundy. Estas coloraciones nos ayudaron a obtener nuestras cotas inferiores. Mientras que, para obtener nuestras cotas superiores utilizamos técnicas de conteo.



# Abstract

A triangle is a polygon with three edges and three vertices. The *intersection graph of triangles*, is a graph in which the set of vertices corresponds to a set of open triangles (i.e. triangles that don't include its border), and there is an edge between two vertices if and only if the corresponding triangles intersect. The set of open triangles is determined by a set of  $n$  points in general position in the plane. A *Grundy coloring* of a graph  $G$  is a vertex coloring of  $G$  having the property that for every two colors  $i$  and  $j$ ,  $i < j$ , every vertex colored  $j$  has a neighbor colored  $i$ . The maximum positive integer  $k$  for which a graph  $G$  has a Grundy  $k$ - coloring is called *the Grundy number* of  $G$ . We study the Grundy number of the intersection graph of triangles.

In this thesis, we give upper and lower bounds for the Grundy number of the intersection graph of triangles. If the points are in in general position, we give upper and lower bounds for the maximum degree for the intersection graph of triangles. Moreover when the points are in convex position, we give a lower bound for the maximum set of triangles in which each two intersect but the intersection of all the triangles is empty. We develop a computer program to search for the Grundy number. This program helped us to obtain the lower bounds. To obtain the upper bounds we used combinatorial techniques.



# Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a Dios, pues ha sido mi padre, amigo y mentor. Él es la inspiración de mis objetivos, y en específico de éste. *Cuando la música deja de sonar y estoy ante ti ...*

Agradezco a mis padres por su apoyo incondicional y por el amor que me tienen.

Agradezco a Luis y a Brandon el añadir risas, películas y conversaciones al final de mis días en la escuela.

Agradezco a mi familia CIA, a Jair y a Hector de quienes siempre recibí buenos deseos para culminar esta etapa.

Agradezco de una manera especial a la Dra. Dolores, quien fue para mi una gran directora de tesis y muy buena maestra. Agradezco su guía, su disponibilidad, su apoyo y sus consejos.

Gracias a Pedro Cruz un gran amigo con quien hice duo en esta etapa y de quien eh aprendido mucho. Gracias a los amigos que llegaron con esta etapa y que además fueron mis compañeros de clase y de comida, Guillermo Monrroy, Guillermo Falcon, Luis, Diana, Manuel, Daniel, Eliot, Adri.

Gracias a las secretarias Sofi, Felipa y Erika por su ayuda en todos los procesos administrativos. Por el mismo motivo agradezco al Dr. Amilcar, de quien siempre tuve apoyo para concluir este posgrado.

Finalmente agradezco a CONACYT por el apoyo económico para poder realizar estos estudios de posgrado.





# Índice general

Resumen . . . . .	III
Abstract . . . . .	V
<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Gráficas . . . . .	5
2.1.1. Coloración de Vértices . . . . .	6
2.2. Gráficas Geométricas . . . . .	9
2.2.1. Coloración de Aristas . . . . .	10
2.3. Gráficas de Intersección de Triángulos . . . . .	10
2.3.1. Coloración de Triángulos . . . . .	12
<b>3. Estado del Arte</b>	<b>13</b>
<b>4. Resultados: Número de Grundy</b>	<b>25</b>
4.1. Conjunto de Puntos en Posición Convexa . . . . .	25
4.1.1. Cota Inferior . . . . .	31
4.1.2. Cota Superior . . . . .	35
4.2. Conjunto de Puntos en Posición General . . . . .	36
4.2.1. Cota Inferior . . . . .	36
4.2.2. Cota Superior . . . . .	37
<b>5. Resultados Experimentales</b>	<b>45</b>
<b>6. Conclusiones y Trabajo a Futuro</b>	<b>55</b>
<b>A. Lista de resultados</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>



# Índice de figuras

2.1. Construcción de la gráfica de intersección de los triángulos determinados por un conjunto $S$ de 4 puntos. . . . .	11
3.1. $S := \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ . . . . .	14
3.2. Líneas concurrentes que separan el plano en 6 partes. . . . .	15
3.3. $p$ en el interior de triángulos $a_1c_1e_1$ y $b_1d_1f_1$ . . . . .	16
3.4. Triángulos que contienen a $p$ en su interior. . . . .	17
4.1. Triángulo $t$ de grado máximo . . . . .	39
4.2. $S^*$ para $n = 12$ . . . . .	41
5.1. Prueba experimental, cota inferior y cota superior para $G_S(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ determinado por conjuntos de puntos en posición convexa. . . . .	49
5.2. Prueba experimental y cota inferior para $G_S(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ determinado por conjuntos de puntos en posición general. . . . .	49
5.3. Prueba experimental y cota superior para $G_S(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ determinado por conjuntos de puntos en posición general. . . . .	50
5.4. Clase cromática de color 1 para conjunto de puntos de tamaño $n = 5$ en posición convexa. . . . .	51
5.5. Clase cromática de color 1 para conjunto de puntos de tamaño $n = 8$ en posición convexa. . . . .	52
5.6. Clase cromática de color 1 para conjunto de puntos de tamaño $n = 8$ en posición general. . . . .	52
5.7. Clase cromática de color 1 para conjunto de puntos de tamaño $n = 9$ en posición convexa. . . . .	53



# Índice de tablas

3.1. Valores de $\chi_g(\mathbf{G})$ . . . . .	22
5.1. Posible número de Grundy para conjuntos de $4 \leq n \leq 10$ puntos en posición convexa. . . . .	48
5.2. Posible número de Grundy para conjuntos de $4 \leq n \leq 10$ puntos en posición general. . . . .	48



# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis se encuentra en la intersección de dos áreas de investigación: la Geometría Combinatoria y la Geometría Computacional. La Geometría Computacional estudia problemas geométricos desde el punto de vista de la Computación. En esta área se diseñan y analizan algoritmos computacionales eficientes para la manipulación de objetos geométricos. Por ejemplo, un algoritmo que calcule la envolvente convexa de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano, un algoritmo que calcule el diámetro de  $S$ , un algoritmo que calcule la distancia entre dos puntos, por mencionar algunos casos. La Geometría Computacional está estrechamente relacionada con la Geometría Combinatoria, la cual estudia las propiedades combinatorias de objetos geométricos discretos, por ejemplo, cómo se intersecta un objeto con otro, cuántas caras o intersecciones tiene cierta familia de objetos, etcétera.

Una gráfica es definida como un conjunto de vértices y un conjunto de aristas que unen pares de vértices. La coloración de una gráfica consiste en asignar un color a cada uno de sus vértices. Es común que en las coloraciones de gráficas los colores sean representados con números enteros positivos. Una razón por la que se utilizan los números enteros positivos como colores, es que muchas veces el objetivo de los problemas es conocer el número de colores que se usan en una coloración. El área de Coloración de Gráficas es un área importante para la Teoría de Gráficas. Por ejemplo, el problema de los cuatro colores es un problema destacado en el área de Coloración de Gráficas, porque marcó un notable desarrollo en el área de Teoría de Gráficas. Algunos problemas de diversas áreas como la Biología, la Química, la Sociología, la Electrónica y la Computación, son modelados por medio de gráficas, para ejemplos concretos consultar [1]. En algunos de estos problemas se utilizan coloraciones de estas gráficas para su solución. La coloración de gráficas tiene aplicaciones en la vida cotidiana y en las Ciencias de la Computación, donde se usa en diversas áreas como la minería de datos, segmentación de imágenes, agrupamiento, redes, etcétera [1]. Por ejemplo, para asignar horarios a reuniones de comités en una empresa, para el control de tráfico mediante una buena administración del funcionamiento de los semáforos, para resolver el problema de la galería de arte, etc. Para descripciones detalladas de estos problemas, ver [10].

Las gráficas de intersección de objetos geométricos son importantes para el estudio de esta tesis. Dada una familia  $F$  de objetos geométricos (por ejemplo cajas, intervalos en el plano, triángulos, discos, etc.), una gráfica de intersección de objetos geométricos está definida como la gráfica que tiene un vértice por cada miembro de  $F$ , dos de los cuales se conectan con una arista si y sólo si sus objetos geométricos correspondientes se intersectan.

Las gráficas de intersección son importantes desde un punto de vista tanto teórico como práctico ya que aportan resultados en áreas como la Combinatoria y la Computación. En la Geometría Computacional, los problemas de intersección de objetos surgen en diversas aplicaciones como la detección de colisiones o planeación de movimientos de robots.

En esta tesis estudiamos coloraciones en gráficas de intersección de objetos geométricos. En específico cuando dichos objetos son triángulos. Nos interesa conocer el máximo número de colores que se le pueden asignar a los vértices de estas gráficas, tal que cada par de vértices adyacentes tengan color distinto, y además cada vértice sea adyacente con al menos un vértice de cada color más pequeño que el suyo. Una forma equivalente de entender este problema es conocer el máximo número de colores que se le pueden asignar a los triángulos de una familia de triángulos, tal que cada par de triángulos que se intersectan tengan color distinto, y además cada triángulo se intersecte con al menos un triángulo de cada color más pequeño que el suyo. El número que buscamos es llamado el número de Grundy. Se sabe que encontrar el número de Grundy de una gráfica es un problema  $NP$ -difícil [10]. Por esta razón nosotras damos una cota inferior y una cota superior para dicho número. Realizamos un programa que genera este tipo de coloraciones para gráficas de intersección de triángulos, dichas coloraciones nos ayudan a acotar inferiormente al número de Grundy. Para dar cotas superiores utilizamos técnicas combinatorias. Puede consultar el apéndice A para ver la lista de nuestros resultados.

A continuación mostramos cómo está organizada esta tesis. En el capítulo 2 presentamos definiciones básicas sobre gráficas, coloraciones en vértices, gráficas geométricas, coloraciones en aristas, gráficas de intersección de triángulos, y coloraciones en triángulos. Además damos algunos teoremas importantes en el área de Teoría de Gráficas. En el capítulo 3 mostramos algunos trabajos de la literatura que estudian propiedades en conjuntos de triángulos, algunos índices de coloración de coloraciones en aristas, y trabajos sobre gráficas de intersección de objetos geométricos (como aristas, triángulos y objetos convexos). En el capítulo 4 damos cotas para el número de Grundy. En la sección 4.1 damos una cota inferior y una cota superior para el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos determinados por conjuntos de puntos en posición convexa. También exhibimos un conjunto de triángulos determinados por conjuntos de puntos en posición convexa que se intersectan dos a dos, y tal



que la intersección de todos es vacía. En la sección 4.2 damos una cota inferior y una cota superior para el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos determinados por conjuntos de puntos en posición general. En el capítulo 5 describimos el programa que desarrollamos, discutimos los resultados obtenidos en nuestras pruebas, y mencionamos algunos resultados importantes que nos ayudaron a resolver nuestro problema. Finalmente en el capítulo 6 concluimos y proponemos trabajo a futuro relacionado con esta tesis.



# Capítulo 2

## Marco Teórico

Con el fin de que esta tesis sea auto contenida, en este capítulo damos algunos conceptos y algunas propiedades de las gráficas, así como de las gráficas geométricas y de las gráficas de intersección de triángulos. Todo esto es tomado de [10]. Además presentamos la notación que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

### 2.1. Gráficas

Una *gráfica*  $G$  es una pareja de conjuntos  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, y  $E$  es un conjunto de subconjuntos de dos elementos de  $V$  llamados aristas. El número de vértices de  $G$  es el *orden* de  $G$  y el número de aristas es el *tamaño* de  $G$ . A una arista  $\{u, v\}$  de  $E$  la denotamos como  $uv$  ó  $vu$ . Si  $uv$  es una arista de  $G$  entonces decimos que  $u$  y  $v$  son *vértices adyacentes*. El *grado de un vértice*  $v$  en  $G$  es el número de vértices en  $G$  que son adyacentes a  $v$ , y lo denotamos como  $\text{grado}(v)$ . El *grado máximo* de  $G$  es el grado más grande de entre los vértices de  $G$ , y es denotado por  $\Delta(G)$ .

Una gráfica  $G' = (V', E')$  es una *subgráfica* de  $G$  si  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ .  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  es una *partición* de los vértices de  $G$ , si  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$  y si  $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k = \emptyset$ . Una subgráfica  $G'$  de  $G$  es *inducida* por  $V' \subseteq V$  si  $G'$  tiene a  $V'$  como su conjunto de vértices y dos vértices  $u$  y  $v$  de  $V'$  son adyacentes en  $G'$  si y sólo si son adyacentes en  $G$ . Un subconjunto  $U \subseteq V$  es un *conjunto independiente* si no existe ninguna pareja de vértices en  $U$  que sean adyacentes.

Una gráfica  $G$  es *completa* si cualesquiera dos vértices en  $G$  son adyacentes. Una subgráfica completa de  $G$  es llamada un *clan* de  $G$ . Un clan de orden  $k$ , es un  $k$ -clan. El máximo orden de un clan de  $G$  es llamado *número de clan* de  $G$  y es denotado como  $\omega(G)$ . Una digráfica  $D$  es un conjunto finito no vacío  $V$  de objetos llamados vértices, y un conjunto  $E$  de pares ordenados de distintos elementos de  $V$  llamados aristas. Los elementos de  $E$  son llamados *aristas dirigidas* ó *flechas*. El *exgrado* de un vértice  $v$  de una digráfica  $D$  es el número de flechas que salen de  $v$  en  $D$ , y lo denotamos como

$\text{grado}^+(v)$ . El *ingrado* de un vértice  $v$  de una digráfica  $D$  es el número de flechas que entran a  $v$  en  $D$ , y lo denotamos como  $\text{grado}^-(v)$ . A continuación mostramos que la suma de todos los exgrados de una digráfica  $D$  es igual al tamaño de  $D$  y que la suma de todos los ingrados de  $D$  es igual al tamaño de  $D$ . Es decir, la suma de todos los exgrados de  $D$  es equivalente a la suma de todos los ingrados de  $D$ .

**Teorema 2.1.** ([10]) Si  $D$  es una digráfica de tamaño  $m$ , entonces:

$$\sum_{v \in V(G)} \text{grado}^+(v) = \sum_{v \in V(G)} \text{grado}^-(v) = m$$

**Demostración** Cada arista suma 1 en la suma de los exgrados de  $D$  y suma 1 en la suma de los ingrados de  $D$ . Como hay  $m$  aristas en  $D$ , entonces

$$\sum_{v \in V(G)} \text{grado}^+(v) = m \text{ y } \sum_{v \in V(G)} \text{grado}^-(v) = m.$$

$$\text{Así: } \sum_{v \in V(G)} \text{grado}^+(v) = \sum_{v \in V(G)} \text{grado}^-(v) = m.$$

□

Un *torneo* es una orientación de una gráfica completa.

### 2.1.1. Coloración de Vértices

Una *coloración propia* de los vértices de  $G$  es una función suprayectiva

$$c : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \text{ (donde } \mathbb{N} \text{ es el conjunto de los naturales), tal que } c(u) \neq c(v)$$

si  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G$ . Para las coloraciones es común elegir los números enteros positivos como colores. Si cada color utilizado es uno de  $k$  colores dados, entonces la coloración es una *k-coloración*.  $G$  es *k-coloreable* si existe una *k-coloración* de los vértices de  $G$ . Supongamos que  $c$  es una *k-coloración* de  $G$ . Sea  $C_i$ , para  $1 \leq i \leq k$  el conjunto de vértices en  $G$  coloreados con color  $i$ . A cada  $C_i$  le llamamos *clase cromática* de  $G$  y las clases cromáticas  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  forman una partición de los vértices de  $G$ . Esto se debe a que  $c$  es una función. Cada clase cromática  $C_i$  es un conjunto independiente de vértices de  $G$ , puesto que en  $C_i$  no existen parejas de vértices que sean adyacentes.

Una *coloración completa* de los vértices de  $G$ , es una coloración tal que para cualquier pareja de colores existe al menos una pareja de vértices adyacentes con dichos colores. Una *coloración de Grundy* de los vértices de  $G$ , es una coloración propia donde dados dos colores  $i < j$  se cumple la propiedad de que cada vértice coloreado con el color  $j$ , tiene al menos un vecino coloreado con el color  $i$ . Sea  $c$  una coloración de Grundy de una gráfica  $G$ . Tómese una pareja de colores de  $c$ , por ejemplo el color  $i$  y el color  $j$ . Si  $i < j$  todos los vértices de  $G$  coloreados con color  $j$  tienen al menos

un vértice adyacente coloreado con color  $i$ . Si  $j < i$  todos los vértices de  $G$  coloreados con color  $i$  tienen al menos un vértice adyacente coloreado con color  $j$ . Esto quiere decir que para cualquier pareja de colores de  $c$ , existe al menos un par de vértices adyacentes en  $G$  con dichos colores. Por lo tanto,  $c$  es una coloración completa. La coloración de Grundy está estrechamente relacionada con la coloración glotona. Decimos que una *coloración es glotona* si se obtiene con el algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** Coloración glotona

---

**Entrada:** Vértices de la gráfica  $G$  listados en el orden  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

**Salida:** Coloración propia de los vértices de  $G$ .

- 1: Al vértice  $v_1$  le es asignado el color 1.
  - 2: Una vez que a cada uno de los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_t$ ,  $1 \leq t < n$ , les ha sido asignado un color, al vértice  $v_{t+1}$  le es asignado el color más pequeño que no ha sido asignado a algún vecino de  $v_{t+1}$  del conjunto  $v_1, v_2, \dots, v_t$ .
- 

A continuación demostramos que una coloración glotona de  $G$  es también una coloración de Grundy de  $G$ .

**Teorema 2.2.** ([10]) Sea  $c$  una coloración glotona de una gráfica  $G$ , si y sólo si  $c$  es una coloración de Grundy de  $G$ .

**Demostración** Supongamos que  $c$  es una coloración glotona de  $G$  y por contradicción, que  $c$  no es una coloración de Grundy de  $G$ . Entonces existen al menos un par de vértices coloreados con colores  $i$  y  $j$  ( $i < j$ ) que no son adyacentes en  $G$ . Sea  $v_t$  el vértice coloreado con color  $j$ . Como  $v_t$  no es adyacente a ningún vértice de color  $i$ , y como  $i < j$ , entonces el algoritmo de coloración glotona hubiera asignado a  $v_t$  el color  $i$ . Lo cual es una contradicción, por lo que si  $c$  es glotona entonces es Grundy.

Sea  $c$  una  $k$ -coloración de Grundy de  $G$ . Etiquetemos a los vértices de  $G$  de la siguiente manera.

Sean  $\{v_1, v_2, \dots, v_a\}$  los vértices coloreados con color 1.

Sean  $\{v_{a+1}, v_{a+2}, \dots, v_b\}$  los vértices coloreados con color 2.

⋮

Sean  $\{v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n\}$  los vértices coloreados con color  $k$ .

Generemos una coloración  $c_1$  de  $G$  con el algoritmo de coloración glotona utilizando como entrada esta etiquetación. Como primer paso en  $c_1$ , a  $v_1$  le asignamos el color 1. Sabemos que el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_a\}$  de  $G$  es un conjunto independiente (ya que  $c$  es una coloración propia). Entonces el color más pequeño que puede ser asignado a cualquier vértice en el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_a\}$  es el color 1.

Los siguientes vértices a colorear son aquellos en el conjunto  $\{v_{a+1}, v_{a+2}, \dots, v_b\}$  de  $G$ . Sabemos por  $c$  que no existe alguna pareja de vértices en este conjunto que

sean adyacentes. También sabemos que cada vértice de este conjunto es adyacente a al menos a un vértice en la clase cromática 1. Por lo tanto el color más pequeño que puede ser asignado a cualquier vértice en el conjunto  $\{v_{a+1}, v_{a+2}, \dots, v_b\}$  es el color 2. Es claro que este argumento se extiende para todos los conjuntos. Por lo tanto  $c_1 = c$ .  $\square$

El *número de Grundy* de  $G$  es el máximo entero positivo  $k$  para el cual  $G$  tiene una  $k$ -coloración de Grundy, y es denotado por  $\Gamma(G)$ . Como consecuencia del teorema 2.2 una definición alternativa es: el número de Grundy de  $G$  es el máximo entero positivo  $k$  para el cual  $G$  tiene una  $k$ -coloración glotona. Si  $k$  es el número de Grundy de  $G$ , entonces existe una  $k$ -coloración de Grundy de  $G$ . Cada vértice  $v$  de  $G$  coloreado con color  $k$  es adyacente al menos un vértice coloreado con color  $i$ , para cualquier  $1 \leq i \leq k - 1$ . Entonces el grado de  $v$  es al menos  $k - 1$  y a lo sumo es el grado máximo de  $G$ . Es decir,  $k - 1 \leq \text{grado}(v) \leq \Delta(G)$ . Y así, acotamos por arriba a  $\Gamma(G)$ :  $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

El *número cromático* de  $G$  es el mínimo entero positivo para el cual  $G$  admite una  $k$ -coloración propia, y es denotado por  $\chi(G)$ . Sea  $G'$  una subgráfica de  $G$ , el siguiente teorema da una cota inferior de  $\chi(G)$  usando a  $\chi(G')$ .

**Teorema 2.3.** ([10]) Si  $G'$  es una subgráfica de  $G$ , entonces  $\chi(G') \leq \chi(G)$ .

**Demostración** Supongamos que  $c$  es una  $k$ -coloración propia de  $G$  que cumple con  $\chi(G) = k$ . Entonces la coloración  $c$  también es una coloración propia de los vértices de  $G'$ . Por lo tanto  $G'$  es  $k$ -coloreable y  $\chi(G') \leq k$ . Es decir  $\chi(G') \leq \chi(G)$ .  $\square$

Como  $\omega(G)$  es el número más grande de vértices de un clan de  $G$ , es decir, el número más grande de vértices de una subgráfica completa de  $G$ , entonces  $\omega(G)$  es una cota inferior para  $\chi(G)$ .

**Corolario 2.4.** ([10]) Para cualquier gráfica  $G$ ,  $\omega(G) \leq \chi(G)$

El mínimo número  $k$  para el cual  $G$  tiene una  $k$ -coloración glotona es  $\chi(G)$ , esto porque la coloración glotona es una coloración propia. Entonces  $\Gamma(G)$  no puede ser más chico que  $\chi(G)$ . Es decir,  $\chi(G) \leq \Gamma(G)$ . A continuación demostramos un teorema que lo comprueba.

**Teorema 2.5.** ([10]) Para una gráfica  $G$  y un entero  $k$  con  $\chi(G) \leq k \leq \Gamma(G)$ , hay una  $k$ -coloración de Grundy de  $G$ .

**Demostración** Sea  $c$  una  $\Gamma(G)$  coloración de Grundy de  $G$ . Sean  $C_1, C_2, \dots, C_{\Gamma(G)}$  las clases cromáticas de  $c$ , donde  $C_i$  es el conjunto de vértices coloreados con color  $i$  en  $c$  para  $1 \leq i \leq \Gamma(G)$ . Supongamos que  $\chi(G) = a_1$ . Sea  $a_i$ , para  $2 \leq i \leq \Gamma(G) + 1$ , el mínimo número de colores de una coloración propia de  $G$ , la cual sea igual a  $c$  en cada vértice que pertenezca a  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{i-1}$ . Entonces  $a_{\Gamma(G)+1} = \Gamma(G)$ .

Sea  $G_i$  la subgráfica de  $G$  inducida por  $C_i \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_{\Gamma(G)}$ , tal que  $2 \leq i \leq \Gamma(G)$ . Como cada vértice en  $C_i$  es adyacente con al menos un vértice de cada una de las clases cromáticas  $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ , entonces en cada coloración de  $G$  que coincida con  $c$  en cada vértice que pertenezca a  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{i-1}$ , a  $G_i$  no se pueden asignar los colores  $1, 2, \dots, (i-1)$ . Entonces,

$$a_i = (i-1) + \chi(G_i). \quad (2.1)$$

Como  $G_{i+1}$  es una subgráfica de  $G_i$ , entonces  $\chi(G_i+1) \leq \chi(G_i)$ . Además una  $\chi(G_i)$  coloración de  $G_i$  puede ser obtenida de una  $\chi(G_{i+1})$  coloración de  $G_{i+1}$ . En dicha coloración, podemos asignarle a todos los vértices en  $C_i$  el mismo color, pero debe ser un color distinto a los colores de la  $\chi(G_{i+1})$  coloración de  $G_{i+1}$ . Entonces:

$$\chi(G_i) - 1 \leq \chi(G_{i+1}) \leq \chi(G_i). \quad (2.2)$$

Por 2.1 y 2.2, tenemos:

$$a_i = (i-1) + \chi(G_i) = (\chi(G_i) - 1) + i \leq \chi(G_{i+1}) + i \leq \chi(G_i) + i = \chi(G_i) + (i-1) + 1 = a_i + 1.$$

Por lo tanto:

$$a_i \leq \chi(G_{i+1}) + i \leq a_i + 1.$$

Como  $a_{i+1} = i + \chi(G_{i+1})$ , entonces tenemos que  $a_i \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$ . También sabemos que  $a_1 = \chi(G)$  y que  $a_{\Gamma(G)+1} = \Gamma(G)$ . Entonces para cada entero  $k$  con  $\chi(G) \leq k \leq \Gamma(G)$ , existe un entero  $i$  con  $1 \leq i \leq \Gamma(G) + 1$  tal que  $a_i = k$ . Como una  $\chi(G)$  coloración de  $G$  es una coloración de Grundy, podemos decir que  $\chi(G) \leq k \leq \Gamma(G)$ . Sea  $c'$  una  $k$  coloración de  $G$ , la cual coincida con  $c$  en cada vértice que pertenezca a  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{i-1}$ . Sea  $c^*$  una  $\chi(G_i)$  coloración glotona de  $G_i$  respecto a una etiquetación  $o^*$  de los vértices de  $G_i$ . Sea  $o$  una etiquetación de los vértices de  $G_i$ , tal que primero sean etiquetados los vértices de  $C_1$ , después sean etiquetados los vértices de  $C_2$ , y así hasta que por último sean etiquetados los vértices de  $C_{i-1}$ , finalmente añadir la etiquetación  $o^*$ . Sea  $c''$  una  $l$  coloración glotona de  $G$  respecto a  $o$ . Supongamos que  $c''$  es una  $l$  coloración de  $G$ . Entonces  $c''$  es una  $l$  coloración de Grundy de  $G$  que coincide con  $c'$  y  $c$  para cada vértice que pertenezca a  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{i-1}$  y  $c''$  asigna a cada vértice de  $G$  un color no más grande que el color asignado al vértice en  $c'$ . Entonces  $l \leq k$ . Por otro lado, la coloración  $c''$  no puede usar menos de  $k = a_i$  colores, entonces  $l = k$  y así,  $c''$  es una  $k$  coloración de Grundy de  $G$ .  $\square$

## 2.2. Gráficas Geométricas

Una *gráfica geométrica*  $G$  es un dibujo de una gráfica  $G$  en el plano, tal que sus vértices son puntos en el plano en posición general, y sus aristas son segmentos de recta. Una gráfica geométrica es *completa* si para cada par de vértices en la gráfica existe una arista que los une.

### 2.2.1. Coloración de Aristas

Sea  $\mathbf{G}$  una gráfica geométrica de cualquier gráfica  $G$ . Una *coloración propia* de las *aristas* de  $\mathbf{G}$  consiste en asignar a cada arista un color de tal forma que dos aristas que inciden en un vértice, o se cruzan, no tengan el mismo color. Una *coloración completa* de las *aristas* de  $\mathbf{G}$  es una coloración tal que para cualquier pareja de colores existe al menos una pareja de aristas adyacentes con dichos colores.

El *índice cromático* de  $\mathbf{G}$ , es el entero mas pequeño  $k$  para el cual  $\mathbf{G}$  tiene una  $k$  coloración propia de sus aristas, y es denotado por  $\chi_1(\mathbf{G})$ . El *índice acromático* de  $\mathbf{G}$  es el entero más grande  $k$  para el cual  $\mathbf{G}$  tiene una  $k$  coloración propia y completa de sus aristas, y es denotado por  $\alpha_1(\mathbf{G})$ . El *índice pseudoacromático* de  $\mathbf{G}$  es el entero más grande  $k$  para el cual  $\mathbf{G}$  tiene una  $k$  coloración completa de sus aristas, y es denotado por  $\psi_1(\mathbf{G})$ . El *índice de Grundy* de  $\mathbf{G}$  es el entero más grande  $k$  para el cual existe una  $k$  coloración de Grundy propia de las aristas de  $\mathbf{G}$  y es denotado por  $\Gamma_1(\mathbf{G})$ .

Sea  $L(\mathbf{G})$  la gráfica de intersección de las aristas de una gráfica geométrica  $\mathbf{G}$ , tal que cada vértice de  $L(\mathbf{G})$  representa una arista de  $\mathbf{G}$ ; y un par de vértices de  $L(\mathbf{G})$  son adyacentes, si y sólo si, sus aristas correspondientes comparten un vértice o se cruzan en  $\mathbf{G}$ . Nótese que el índice cromático  $\chi_1(\mathbf{G})$ , el índice acromático  $\alpha_1(\mathbf{G})$ , el índice pseudoacromático  $\psi_1(\mathbf{G})$  y el índice de Grundy  $\Gamma_1(\mathbf{G})$ , son definidos como el número cromático  $\chi(L(\mathbf{G}))$  (número mas pequeño  $k$  por el cual  $L(\mathbf{G})$  tiene una  $k$  coloración propia), el número acromático  $\alpha(L(\mathbf{G}))$  (número mas grande  $k$  por el cual  $L(\mathbf{G})$  tiene una  $k$  coloración propia y una coloración completa), el número pseudoacromático  $\psi(L(\mathbf{G}))$  (número mas grande  $k$  por el cual  $L(\mathbf{G})$  tiene una  $k$  coloración completa) y el número de Grundy  $\Gamma(L(\mathbf{G}))$  (número mas grande  $k$  por el cual  $L(\mathbf{G})$  tiene una  $k$  coloración de Grundy) de  $L(\mathbf{G})$ . Así,  $\chi_1(\mathbf{G}) = \chi(L(\mathbf{G}))$ ,  $\alpha_1(\mathbf{G}) = \alpha(L(\mathbf{G}))$ ,  $\psi_1(\mathbf{G}) = \psi(L(\mathbf{G}))$ ,  $\tau_1(\mathbf{G}) = \tau(L(\mathbf{G}))$  y  $\Gamma_1(\mathbf{G}) = \Gamma(L(\mathbf{G}))$ .

## 2.3. Gráficas de Intersección de Triángulos

A continuación definimos el tipo de gráficas con las que se trabaja en esta tesis. Antes de hacerlo, es necesario dar algunos conceptos.

Un polígono  $P$  es *convexo* si y sólo si, para cualquier par de vértices  $p, q \in P$  el segmento  $pq$  está completamente contenido en  $P$ . Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Decimos que  $S$  está en *posición general* si no contiene tres puntos que sean colineales. Decimos que  $S$  está en *posición convexa* si los puntos forman los vértices de un polígono convexo. Un *triángulo* es la región del plano acotada por tres puntos y los tres segmentos entre ellos. Un *triángulo determinado* por  $S$  es un triángulo cuyos vértices están en  $S$ . Un triángulo determinado por tres puntos  $s_i, s_j$  y  $s_k$  en  $S$ , lo denotamos como  $\Delta(s_i s_j s_k)$ . Un *triángulo abierto* es un triángulo que no incluye su frontera.



Sea  $\mathcal{T}$  el conjunto de todos los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Decimos que dos triángulos  $t$  y  $t'$  en  $\mathcal{T}$  se intersectan si uno de ellos está contenido en el otro, ó si ambos comparten al menos un punto en común. Dicho punto debe ser diferente a algún punto de la frontera de  $t$  y  $t'$ . La *gráfica de intersección*  $G_S(\mathcal{T})$  de  $\mathcal{T}$  es una gráfica donde cada vértice representa a un triángulo en  $\mathcal{T}$ , y existe una arista entre dos vértices si y sólo si los triángulos correspondientes se intersectan. Por ejemplo, en la figura 2.1 observamos un conjunto  $S$  de 4 puntos,  $\mathcal{T}$  está dada por los triángulos:  $\Delta(s_1s_2s_4)$ ,  $\Delta(s_1s_2s_3)$ ,  $\Delta(s_1s_3s_4)$ ,  $\Delta(s_2s_3s_4)$ . La gráfica de intersección  $G_S(\mathcal{T})$  se muestra en la figura 2.1f.

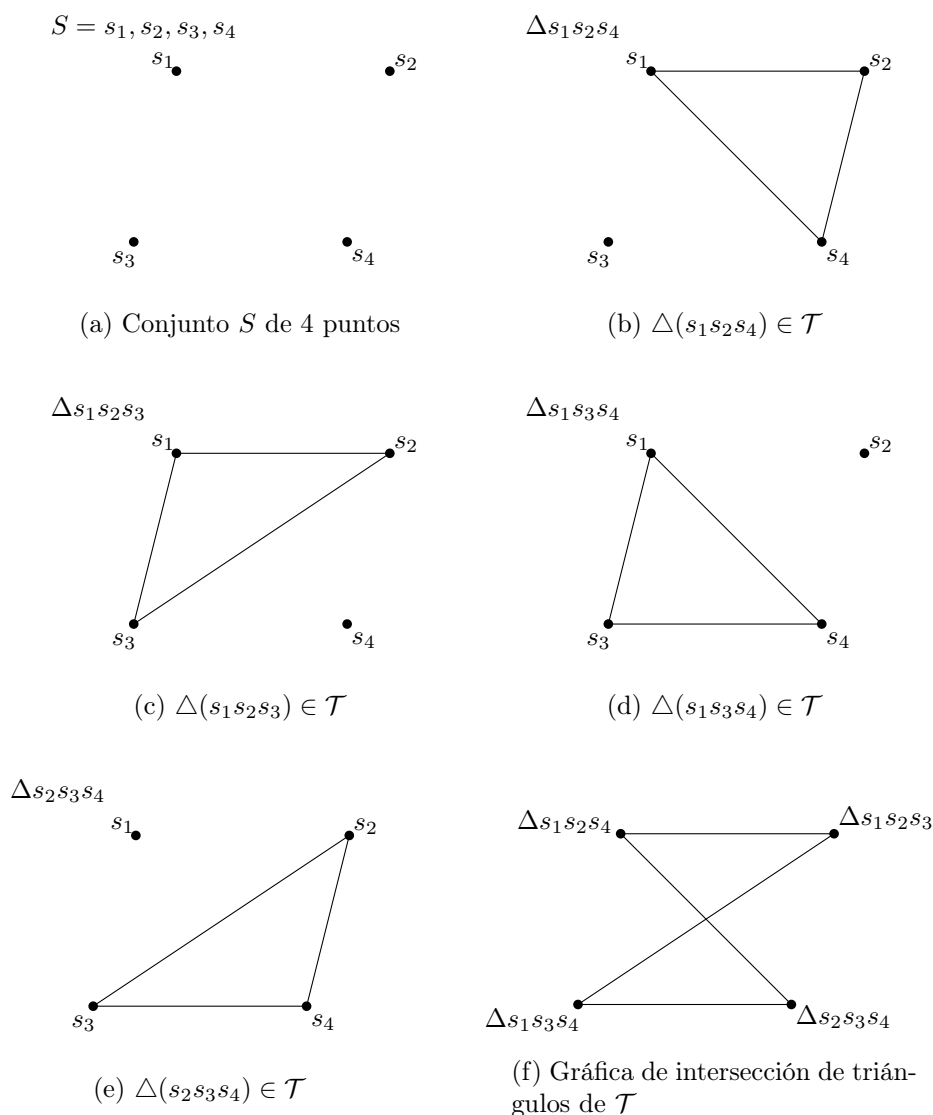


Figura 2.1: Construcción de la gráfica de intersección de los triángulos determinados por un conjunto  $S$  de 4 puntos.

El *grado de un triángulo*  $t$  en  $\mathcal{T}$  es el número de triángulos en  $\mathcal{T}$  que intersectan a  $t$ . El *grado máximo* de  $\mathcal{T}$  es el grado más grande entre los triángulos de  $\mathcal{T}$ , y es denotado por  $\Delta(\mathcal{T})$ . Así, el grado de un vértice  $v$  en  $G_S(\mathcal{T})$  es igual al grado de su triángulo equivalente  $t$  en  $\mathcal{T}$ . Es decir,  $\text{grado}(v) = \text{grado}(t)$  y  $\Delta(G_S(\mathcal{T})) = \Delta(\mathcal{T})$ .

El conjunto  $\mathcal{T}$  es *completo* si cada dos triángulos en  $\mathcal{T}$  se intersectan. Una subconjunto completo de  $\mathcal{T}$  es llamado un *clan* de  $\mathcal{T}$ . El máximo orden de un clan de  $\mathcal{T}$  es llamado *número de clan* de  $\mathcal{T}$  y es denotado por  $\omega(\mathcal{T})$ .

### 2.3.1. Coloración de Triángulos

Una *coloración propia* de los triángulos de  $\mathcal{T}$  consiste en asignar a cada triángulo un color de tal forma que dos triángulos que se intersecten no tengan el mismo color. Una *coloración completa* de los triángulos de  $\mathcal{T}$  es una coloración tal que para cualquier pareja de colores existe al menos una pareja de triángulos que se intersectan con dichos colores. Una *coloración de Grundy* de los triángulos de  $\mathcal{T}$ , es una coloración propia de los triángulos de  $\mathcal{T}$  donde dados dos colores  $i < j$  se cumple la propiedad de que cada triángulo coloreado con el color  $j$ , intersecta al menos un triángulo coloreado con el color  $i$ , para cada  $i < j$ .

El *número cromático* de  $\mathcal{T}$ , es el entero mas pequeño  $k$  para el cual  $\mathcal{T}$  tiene una  $k$  coloración propia de sus triángulos, y es denotado por  $\chi(\mathcal{T})$ . El *número de Grundy* de  $\mathcal{T}$  es el entero más grande  $k$  para el cual existe una  $k$  coloración de Grundy propia de los triángulos de  $\mathcal{T}$  y es denotado por  $\Gamma(\mathcal{T})$ .

Es importante ver que una coloración propia, una coloración completa, y una coloración de Grundy de los triángulos de  $\mathcal{T}$  es equivalente a tener una coloración propia, una coloración completa, y una coloración de Grundy de los vértices de  $G_S(\mathcal{T})$ . Del mismo modo,  $\chi(\mathcal{T})$  (número cromático) y  $\Gamma(\mathcal{T})$  (número de Grundy) de  $\mathcal{T}$  son equivalentes a  $\chi(G_S(\mathcal{T}))$  (número cromático) y  $\Gamma(G_S(\mathcal{T}))$  (número de Grundy) de  $G_S(\mathcal{T})$ .

# Capítulo 3

## Estado del Arte

En este capítulo mostramos resultados que aparecen en la literatura y que están relacionados con el trabajo presentado en esta tesis. Estos resultados muestran propiedades de coloración en vértices y en aristas de gráficas, además propiedades de triángulos determinados por conjuntos de puntos. El análisis de estos trabajos es importante debido a que en esta tesis se estudia un índice de coloración de la gráfica de intersección de triángulos.

Iniciamos mostrando resultados sobre triángulos. En el artículo [6], los autores buscan el máximo número de triángulos que comparten un punto en su interior. Primero damos algunas definiciones.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general. Denotamos por  $\mathcal{T}$  al conjunto de triángulos determinados por  $S$ . Sea  $x$  un punto en el plano, tal que  $x \notin S$ . Definimos a  $f(S, x)$  como la función que cuenta el número de triángulos en  $\mathcal{T}$  que contienen a  $x$  en su interior, en la Figura 3.1b observamos que para el conjunto  $S := \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ , la función  $f(S, x) = 3$ .

Sea  $x^* \notin S$  el punto en el plano que maximiza a  $f(S, x)$ , para todos los posibles  $x$  en el plano. Definimos a  $f(S)$  como el número de triángulos de  $\mathcal{T}$  que contienen a  $x^*$  en su interior. En la Figura 3.1a observamos que la función  $f(S) = 5$ , para  $x^*$  que maximiza a  $f(S, x)$ .

Sea  $S^*$  el conjunto de  $n$  puntos en el plano que minimiza a  $f(S)$ , para todos los posibles conjuntos de puntos en el plano de tamaño  $n$ . Y sea  $x^* \notin S^*$  el punto en el plano que maximiza a  $f(S^*, x)$ . Denotamos por  $\mathcal{T}^*$  al conjunto de triángulos determinados por  $S^*$ . Definimos a  $f(n)$  como el número de triángulos de  $\mathcal{T}^*$  que contienen a  $x^*$  en su interior. Notacionalmente, tenemos que:

$$f(S) = \max_x f(S, x)$$

$$f(n) = \min_S f(S)$$

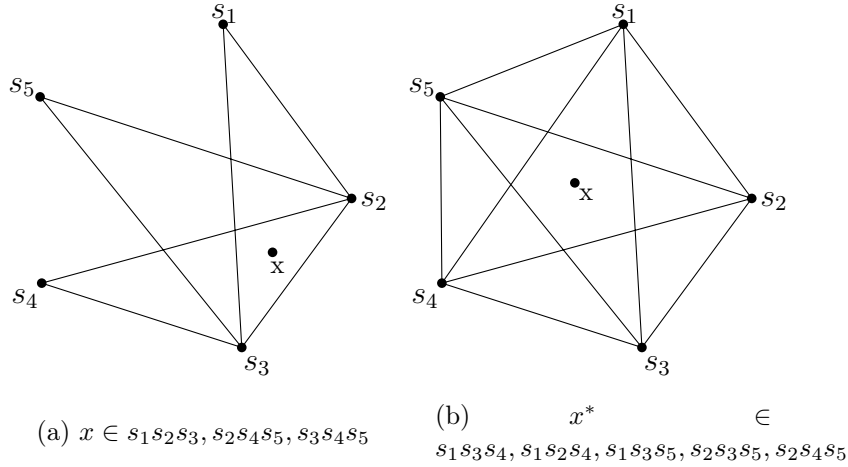


Figura 3.1:  $S := \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

En [6] los autores demuestran el siguiente teorema:

**Teorema 3.1 ([6]).**  $f(n) = \frac{n^3}{27} + O(n^2)$ .

Para demostrar este teorema, primero mostraremos una prueba que aparece en [7], que demuestra:  $f(n) \geq \frac{n^3}{27} + O(n^2)$ , y después mostraremos una prueba que aparece en [6] que demuestra:  $f(n) \leq \frac{n^3}{27} + O(n^2)$ . Con estas dos partes demostraremos el Teorema 3.1.

A continuación, damos algunas definiciones y un lema. Dicho lema es necesario para la demostración del teorema que aparece en [7]. Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general y sean  $l_1, l_2$  y  $l_3$  tres rectas concurrentes que dividen el plano en 6 partes, donde cada parte contiene al menos  $\frac{n}{6} - 1$  puntos del conjunto  $S$ . Sabemos que la existencia de estas rectas está garantizada por un teorema que aparece en [9]. Llamamos  $p$  al punto de intersección de las 3 rectas.

Etiquetamos las 6 partes del plano, en el orden de las manecillas del reloj, con etiquetas  $A, D, C, D, E, F$ , como se observa en la Figura 3.2. Denotamos a los puntos en  $A$  con  $a_i$ , para  $1 \leq i \leq |A|$ . Respectivamente, a los puntos en  $B$  con  $b_j$ , para  $1 \leq j \leq |B|$ , en  $C$  con  $c_k$ , para  $1 \leq k \leq |C|$ , en  $D$  con  $d_l$ , para  $1 \leq l \leq |D|$ , en  $E$  con  $e_m$ , para  $1 \leq m \leq |E|$  y en  $F$  con  $f_o$ , para  $1 \leq o \leq |F|$ . Sea  $H$  un hexágono formado al tomar exactamente un punto de cada una de las partes.

**Lema 3.2.**  $p$  está contenido en  $H$ .

**Demostración** Consideremos  $H$ , los vértices de  $H$  son  $\{a_i, b_j, c_k, d_l, e_m, f_o\}$ . La línea  $l_1$  separa a los subconjuntos  $A, B, C$  de los subconjuntos  $D, E, F$ . Entonces  $l_1$  separa a las aristas  $a_i b_j, b_j c_k$  de las aristas  $d_l e_m, e_m f_o$ . De la misma forma la línea  $l_2$  separa a los subconjuntos  $B, C, D$  de los subconjuntos  $E, F, A$ . Entonces,  $l_2$  intersecciona a

las aristas  $a_i b_j$ ,  $d_i e_m$  de  $H$ . Definimos a  $s$  como el segmento dado por el punto de intersección de  $l_2$  y  $a_i b_j$ , y el punto de intersección de  $l_2$  y  $d_i e_m$ . Como  $l_1$  está entre las aristas  $a_i b_j$ ,  $d_i e_m$ , entonces el punto de intersección de  $l_1$  y  $l_2$  está contenido en  $s$ . Como  $l_2$  intersecciona a  $H$  exactamente dos veces,  $s$  está contenido en  $H$ , por lo tanto,  $p$  está contenido en  $H$ .  $\square$

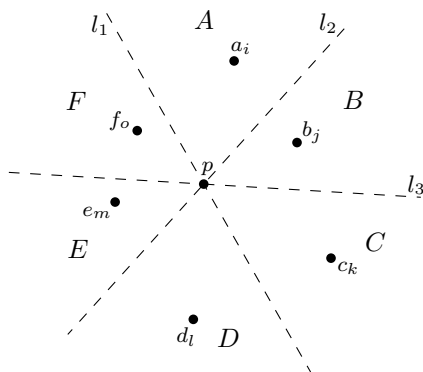


Figura 3.2: Líneas concurrentes que separan el plano en 6 partes.

El siguiente teorema acota a  $f(n)$  por abajo. La demostración fue tomada de [7] donde los autores demuestran que para cada conjunto  $S$  de  $n$  puntos, siempre existe un punto  $p$  que está contenido en al menos  $\frac{n^3}{27} + O(n^2)$  triángulos abiertos determinados por  $S$ .

**Teorema 3.3 ([7]).** Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos tenemos:

$$f(n) \geq \frac{n^3}{27} + O(n^2).$$

### *Demostración*

Sean  $l_1, l_2, l_3$  tres rectas concurrentes que dividen al plano en 6 partes, tal que cada parte contiene al menos  $\frac{n}{6} - 1$  puntos del conjunto  $S$  en su interior. Y sea  $p$  el punto de intersección de estas rectas. Por el lema 2, cualquier hexágono que tenga exactamente un punto en cada una de las partes de la partición, contiene a  $p$  en su interior. Sea  $H$  uno de estos hexágonos. Etiquetamos las 6 partes del plano en el orden de las manecillas del reloj, como en la Figura 3.3.

Existen  $\binom{6}{3} = 20$  triángulos determinados por los vértices de  $H$ . Como  $H$  contiene a  $p$  en su interior, necesariamente algunos de estos triángulos contienen a  $p$  en su interior. El triángulo de  $H$  formado con un punto de la parte  $A$ , un punto de la parte  $C$  y con un punto de la parte  $E$ , contiene a  $p$  en su interior. De la misma forma el triángulo de  $H$  formado por un punto en  $B$ , un punto en  $D$  y un punto en  $F$ , contiene a  $p$  en su interior. Entonces, por el momento tenemos al menos 2 triángulos que contienen a  $p$  en su interior.

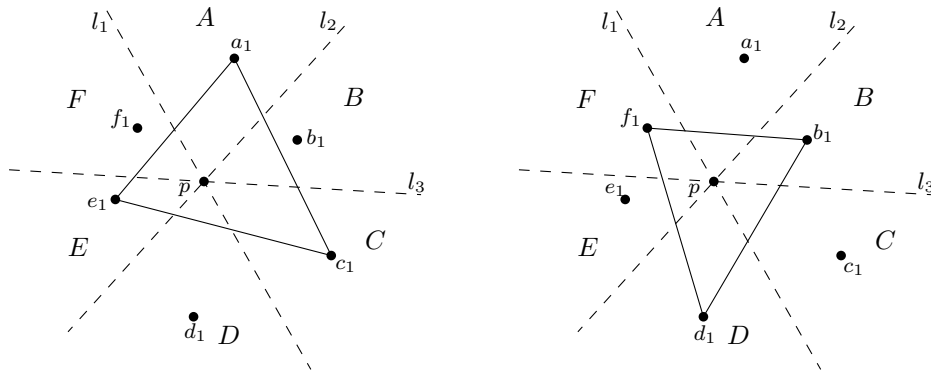


Figura 3.3:  $p$  en el interior de triángulos  $a_1c_1e_1$  y  $b_1d_1f_1$

Consideremos la cuarteta de  $H$  formada por un punto en  $A$ , un punto en  $B$ , un punto en  $C$ , y un punto en  $E$ . En la Figura 3.4a podemos ver los 4 puntos con los que podemos formar los siguientes dos triángulos  $a_1b_1e_1$  y  $b_1c_1e_1$ , de los cuales uno contiene a  $p$  en su interior.

Consideremos las cuartetas  $BCDF$ ,  $ACDE$ ,  $BDEF$ ,  $ACEF$ , y  $ABDF$ , formadas de tomar un punto de cada parte. Observemos en la Figura 3.4b, en la Figura 3.4c, en la Figura 3.4d, en la Figura 3.4e, y en la Figura 3.4f, que en cada par de triángulos formados por estas cuartetas existe uno que contiene a  $p$  en su interior.

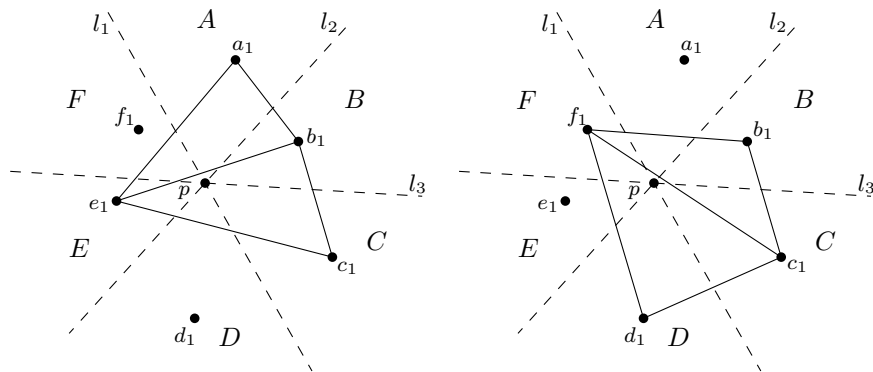
A estos 6 triángulos le sumamos los 2 triángulos que anteriormente ya contenían a  $p$  en su interior, entonces tenemos al menos 8 triángulos por hexágono que contienen a  $p$  en su interior. El número de hexágonos que pueden formarse con un punto de cada parte de la partición es  $\binom{n}{6} - 1$ . Sabemos que existen al menos 8 triángulos por hexágono, que contienen a  $p$ . Entonces tenemos al menos  $8\binom{n}{6} - 8$  triángulos en total que contienen a  $p$ .

Pero, existe un sobre conteo de triángulos. Por ejemplo, en la Figura 3.4a tenemos el hexágono  $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$  y el triángulo  $b_1c_1e_1$  que contiene a  $x$ . Fijemos los vértices de este triángulo para formar cualquier hexágono que contenga algún vértice en  $A$ ,  $D$  y  $F$ , que no sea  $a_1$ ,  $d_1$ ,  $f_1$ . Cada uno de estos hexágonos contiene al mismo triángulo  $b_1c_1e_1$  que contiene a  $p$ . Y el número de este tipo de hexágonos es  $\binom{n}{6} - 1$ . Entonces, quitando el sobre conteo, tenemos al menos :

$$8 \left( \frac{\binom{n}{6} - 1}{\binom{n}{6} - 1} \right) = \frac{2}{9} \binom{n}{3} + O(n^2)$$

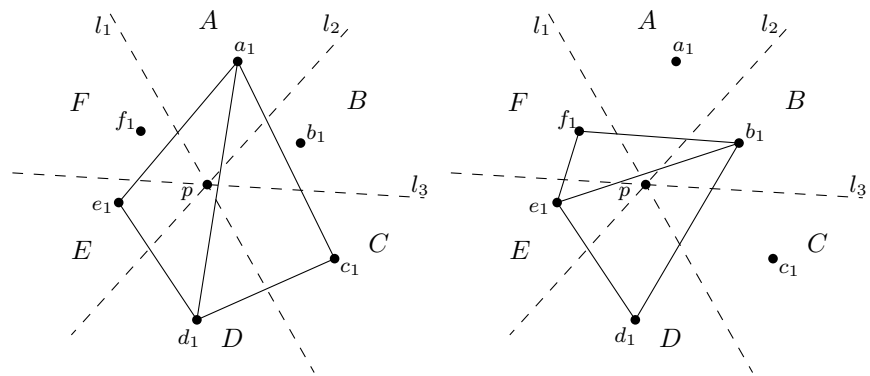
triángulos que contienen a  $p$ . □

Por otro lado, los autores de [6] exhiben un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano, tal que todo  $x \in \mathbb{R}^2$  ( $x \notin S$ ) está contenido en a lo sumo  $\frac{n^3}{27} + O(n^2)$  triángulos de  $\mathcal{T}$ . Es decir:  $f(n) \leq \frac{n^3}{27} + O(n^2)$ .



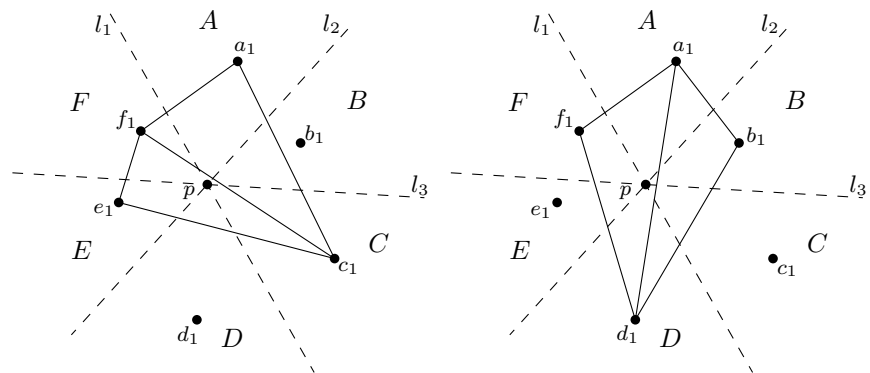
(a)  $p$  en el interior del triángulo  $b_1c_1e_1$

(b)  $p$  en el interior del triángulo  $c_1d_1f_1$



(c)  $p$  en el interior del triángulo  $a_1d_1e_1$

(d)  $p$  en el interior del triángulo  $b_1d_1e_1$



(e)  $p$  en el interior del triángulo  $c_1e_1f_1$

(f)  $p$  en el interior del triángulo  $a_1d_1f_1$

Figura 3.4: Triángulos que contienen a  $p$  en su interior.

Antes de presentar la demostración es necesario definir algunos conceptos. Denotamos por  $\overrightarrow{x\dot{a}}$  el rayo cerrado que inicia en el punto  $x$  y pasa por el punto  $a$ , denotamos por  $\overline{xa}$  la línea recta que pasa por los puntos  $x$  y  $a$  ( $x \neq a$ ). Definimos a  $\overset{\circ}{\Pi}_{\overline{xa}}$  como el semiplano derecho abierto acotado por la recta dirigida  $\overline{xa}$ .  $\Pi_{\overrightarrow{x\dot{a}}} = \overset{\circ}{\Pi}_{\overline{xa}} \cap \overrightarrow{x\dot{a}}$ . Denotamos por  $\delta C$  la frontera de un conjunto convexo  $C$ .

Sea  $\Pi$  un semiplano fijo y sea  $x$  un punto fijo en  $\delta\Pi$  y  $S \cap \delta\Pi = \emptyset$ . Sean  $S \setminus \Pi$  los puntos  $s_1, s_2, \dots, s_k$  y para cualquier  $s_p \in S \setminus \Pi$ ,  $1 \leq p \leq k$ , se define  $r_p := |S \cap \Pi \cap \Pi_{\overrightarrow{xs_p}}|$ . La etiquetación de  $S \setminus \Pi$  se puede dar de tal forma que  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k$ .

**Lema 3.4.** ([6])

$$f(S, x) = \sum_{p=1}^k r_p(2p + n - 1 - 2k - r_p).$$

**Demostración** Cualquier triángulo que contenga a  $x$  en su interior tiene uno o dos vértices en  $\Pi$ . Entonces el número de triángulos que tienen a  $x$  en su interior y que tienen dos vértices en  $S \setminus \Pi$  y uno en  $\Pi$ , está dado por  $r_q - r_p$ , para  $p < q$ .

El número de triángulos que tienen a  $x$  en su interior y que tienen un vértice en  $S \setminus \Pi$  y dos en  $\Pi$ , está dado por  $r_p(n - k - r_p)$ . Entonces:

$$f(S, x) = \sum_{p=1}^k r_p(n - k - r_p) + \sum_{p < t} (r_t - r_p).$$

□

Ahora, presentamos la construcción del conjunto  $S$  que alcanza la cota. Sea  $C$  un círculo unitario con centro en el origen  $O$ , y sea  $q$  un punto sobre la circunferencia de  $C$ . Sea  $S$  la unión de tres conjuntos de puntos  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ , los cuales están sobre la circunferencia de  $C$ , donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{a_i | \angle q O a_i = \frac{i}{n^2}, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}, \\ \mathcal{B} &= \{b_j | \angle q O b_j = \frac{(2\pi)}{3} + n^{-j}, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{(n+1)}{3} \rfloor\} \text{ y} \\ \mathcal{C} &= \{c_k | \angle q O c_k = \frac{(4\pi)}{3} - n^{-k}, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{(n+2)}{3} \rfloor\}. \end{aligned}$$

A continuación daremos la segunda parte de la demostración del Teorema 3.1

**Proposición 3.5.** ([6]) Para cualquier  $x$  en el plano tenemos:

$$f(n) < \frac{n^3}{27} + O(n^2).$$

**Demostración** Tomemos el cierre convexo de dos grupos de  $S$ , por ejemplo  $\delta(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ , y coloquemos a  $x$  sobre ella de tal manera que ningún triángulo de la forma  $a_i a_j a_k$  ó  $b_i b_j b_k$  contenga a  $x$ . Si colocamos a  $x$  sobre la arista que deja de un solo lado al conjunto  $S$  no existirá algún triángulo que contenga a  $x$ , entonces coloquemos a  $x$  sobre la arista que separa al conjunto  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$ . Y tomemos un semiplano  $\Pi$  tal que



$x \in \delta\Pi$  y que  $\Pi$  separe a  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}$ . Recordemos que  $k$  es el número de puntos en  $S$ , que no están en  $\Pi$ , entonces aplicando el Lema 3.4, tenemos que  $k = \frac{n}{3}$ ,  $r_i = \frac{n}{3}$ . Así,

$$\begin{aligned} f(S, x) &= \sum_{p=1}^k \binom{n}{\frac{n}{3}} \left(n - \frac{n}{3} - \frac{n}{3}\right) + \sum_{p < t} \left(\frac{n}{3} - \frac{n}{3}\right) \\ f(S, x) &= \binom{n}{\frac{n}{3}} \left(\binom{n}{\frac{n}{3}}\right) \\ f(S, x) &= \left(\frac{n}{3}\right)^3 \leq \frac{n^3}{27} + O(n^2). \end{aligned}$$

Ahora tomemos un semiplano  $\Pi$  que separe a  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$ , con  $x$  sobre  $\delta\Pi$  tal que  $S \setminus \Pi = \mathcal{A}$ .

Para el conjunto  $S$ , existe un índice  $t \leq k$  tal que  $r_p = r_1$  para todo  $1 \leq p \leq t$ . Estos son los  $\Pi_{\overrightarrow{xs_p}}$  que su intersección con  $\delta C$  que no es  $r_p$ , se encuentra entre  $b_1$  y  $b_2$ . Además existe  $r_p = k$  para  $k \geq p \geq t + 2$ . Estos son los  $\Pi_{\overrightarrow{xs_p}}$  que su intersección con  $\delta C$  que no es  $r_p$ , se encuentra entre  $b_{\frac{n}{3}}$  y  $c_{\frac{n}{3}}$ . Entonces por el Lema 3.4, tenemos la siguiente cuenta:

$$\begin{aligned} f(S, x) &= \sum_{p=1}^t r_1(2p - 2k + n - 1 - a_1) + \\ &\quad \sum_{p=t+2}^k k(2p - 2k + n - 1 - k) + \\ &\quad r_{t+1}(2t + 1 - 2k + n - r_{t+1}) \\ &\leq (t)(r_1)(k + t - r_1) + k(k - t)(k + t) + \\ &\quad (t - k + \frac{n+1}{2})^2 + (t - k + \frac{n+3}{2})^2. \end{aligned}$$

El  $x$  que maximiza a  $f(S, x)$ , lo encontramos cuando  $t = r_1 = k = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  y así tenemos

$$f(S, x) \leq \frac{n^3}{27} + \frac{n^2}{2} + 2n + \frac{5}{2}.$$

□

Los autores de [8] buscan el número de triangulaciones necesarias para cubrir todos los triángulos vacíos determinados por un conjunto  $S$  de  $n$  puntos. Antes de mostrar algunos de los resultados en dicho artículo, daremos algunas definiciones.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general. Sea  $\mathcal{T}$  el conjunto de todos los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Un triángulo en  $\mathcal{T}$  es vacío si no contiene ningún punto de  $S$  en su interior. Sea  $p \notin S$  un punto en el plano. Diremos que un triángulo en  $\mathcal{T}$  es *agudo*, si contiene a  $p$  en su interior. Un triángulo en  $\mathcal{T}$  está cubierto por una triangulación si éste es un elemento de la triangulación. En [8] los autores estudian el número de triangulaciones de  $S$  que son necesarias para cubrir todos los triángulos vacíos de  $\mathcal{T}$ . Y para  $S$  en posición convexa demuestran el lema 3.6 y el teorema 3.7, para los cuales omitimos la demostración.

**Lema 3.6.** ([8]) Sea  $S$  el conjunto de vértices de un  $n$ -ágono regular  $Q$  y sea  $p$  el centro de  $Q$ . Sea:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[ \binom{n}{3} - \frac{n(n-2)}{2} \right] & \text{si } n \text{ es par.} \\ \frac{1}{4} \left[ \binom{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \right] & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Dicha función cuenta el número de triángulos agudos de  $\mathcal{T}$  que contienen a  $p$  en su interior.

**Teorema 3.7.** ([8])  $f(n)$  triangulaciones son necesarias y suficientes, para cubrir todos los triángulos de un polígono regular.

La gráfica de intersección  $G_S(\mathcal{T})$  de  $\mathcal{T}$  es una gráfica donde cada vértice representa a un triángulo en  $\mathcal{T}$ , y existe una arista entre dos vértices si y sólo si los triángulos correspondientes se intersectan. El número cromático de una gráfica  $G$  es el mínimo entero positivo para el cual  $G$  admite una  $k$ -coloración propia, y es denotado por  $\chi(G)$ . En el artículo [11] los autores estudian el número cromático de la gráfica de intersección de triángulos es decir,  $\chi(G_S(\mathcal{T}))$ .

Considérese una triangulación  $T$  del Teorema 3.7, los vértices de los triángulos de  $T$  son un subconjunto de  $S$ . Por otro lado, sabemos que los triángulos de  $T$  son vacíos y además por la definición de triangulación cada dos triángulos comparten a lo sumo un vértice ó una arista. Entonces a los triángulos de  $T$  se les puede asignar un color. Así  $T$  es una clase cromática de una coloración de  $G_S(\mathcal{T})$ . Entonces en [11] los autores encuentran que  $\chi(G_S(\mathcal{T}))$  es equivalente a obtener el mínimo número de triangulaciones de subconjuntos de  $S$  que cubran todos los triángulos determinados por  $S$ . Es decir, a cada triangulación del Teorema 3.7 se le puede asignar un color distinto, obteniendo así  $\chi(G_S(\mathcal{T})) = \frac{n^3}{24} + O(n^2)$  para  $S$  en posición convexa. En [11] aparece el siguiente Teorema para  $S$  en posición general,

**Teorema 3.8.** ([11]) Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general en el plano,

$$\frac{n^3}{27} \leq \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \frac{27n^3}{520} + O(n^2)$$

Del Teorema 3.1, que prueba que por cada conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general existe un punto en el plano que está contenido en el interior de al menos  $\frac{n^3}{27} + O(n^2)$  triángulos determinados por  $S$ , se obtiene la cota inferior del Teorema 3.8. Es decir que al menos se necesita ese número de colores para colorear a la gráfica  $G_S(\mathcal{T})$ . Para demostrar la cota superior, los autores realizan una prueba por inducción basada en el siguiente lema:

**Lema 3.9.** ([11]) Sean  $A$  y  $B$  conjuntos de  $n$  puntos en el plano en posición general separados por una línea. Sea  $X$  el conjunto de triángulos abiertos determinados por  $A \cup B$  y que tiene al menos un vértice en cada uno de los conjuntos. Entonces el número cromático de la gráfica de intersección de  $X$  es a lo sumo  $\frac{2}{5}n^3 + O(n^2)$ .

A continuación mostramos resultados sobre algunos índices de coloración en gráficas. Antes de mostrar los trabajos damos algunas definiciones. Dada una familia

$\mathcal{F}$  de conjuntos, definimos la gráfica de intersección  $G(\mathcal{F})$  como la gráfica que tiene un vértice por cada elemento en  $\mathcal{F}$ , dos de los cuales comparten una arista si y sólo si, los elementos correspondientes se intersectan. Una gráfica  $G$  es  $m$ -degenerada si cada subgráfica  $G'$  de  $G$  tiene un vértice  $v$  de grado a lo sumo  $m$  en  $G'$ . Si  $G$  es  $m$ -degenerada, entonces  $G$  tiene una  $(m + 1)$ -coloración propia.

Sea  $G$  la gráfica de intersección de una familia finita de conjuntos convexos. Estos conjuntos convexos obtenidos por translaciones de un conjunto fijo convexo en el plano. El siguiente artículo muestra resultados sobre el número cromático de  $G$ . En [12] los autores muestran que cada gráfica de tipo  $G$  con número de clan  $k$  es  $(3k - 3)$ -degenerada y entonces  $G$  es  $(3k - 2)$ -coloreable. Presentamos dicho resultado en el siguiente Teorema:

**Teorema 3.10.** ([12]) Sea  $G$  la gráfica de intersección de translaciones de un conjunto fijo convexo compacto en el plano con número de clan  $k$ . Entonces  $G$  es  $(3k - 3)$ -degenerada y el número cromático de  $G$  no excede  $3k - 2$ .

En [5] los autores definen dos gráficas de intersección  $D(S)$  y  $I(S)$ . El conjunto de vértices de dichas gráficas son todos los subconjuntos de  $k$  puntos en  $S$ , para  $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$ . Dos subconjuntos son adyacentes en  $D(S)$  si y sólo si, sus envolturas convexas son disjuntas; y son adyacentes en  $I(S)$  si y sólo si, sus envolturas convexas se intersectan. Se denota con  $d(n)$  al máximo  $\chi(D(S))$  sobre cualquier  $S \subset \mathbb{R}^2$  de tamaño  $n$ . Se denota con  $i(n)$  al máximo  $\chi(I(S))$  sobre cualquier  $S \subset \mathbb{R}^2$  de tamaño  $n$ . Los autores, obtienen las siguientes cotas para el número cromático de  $D(S)$  y de  $I(S)$ :

**Teorema 3.11.** ([5]) Para cualquier  $n \geq 3$ :

$$\begin{aligned} (i) \quad & 2 \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - 1 \leq \chi(D(S)) \leq \min(n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2}). \\ (ii) \quad & 5 \lfloor \frac{n}{7} \rfloor \leq d(n) \leq \min(n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{2}). \end{aligned}$$

**Teorema 3.12.** ([5]) Para cualquier  $n \geq 3$ :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \chi(I(S)) = n. \\ (ii) \quad & n \leq i(n) \leq Cn^{\frac{3}{2}}, \text{ para cualquier constante } C > 0. \end{aligned}$$

A continuación mostramos resultados acerca de algunas propiedades de coloraciones de aristas en gráficas geométricas específicas. Iniciamos con un artículo donde los autores trabajan con algunos índices de coloración. Antes de mostrar los resultados damos algunas definiciones.

Sea  $G$  la gráfica de intersección de las aristas de una gráfica geométrica  $\mathbf{G}$ , tal que cada vértice de  $G$  representa una arista de  $\mathbf{G}$ ; y un par de vértices de  $G$  son adyacentes, si y sólo si, sus aristas correspondientes comparten un vértice o se cruzan en  $\mathbf{G}$ .

En [2] los autores trabajan este tipo de gráficas y los siguientes índices de coloración:  $\chi_1(\mathbf{G})$ ,  $\alpha_1(\mathbf{G})$  y  $\psi_1(\mathbf{G})$ . De manera específica muestran que para  $n$  puntos en posición convexa el índice acromático y el índice pseudoacromático de la gráfica geométrica completa es  $\lfloor \frac{n^2+n}{4} \rfloor$ . También dan una cota superior para el índice pseudoacromático para cualquier gráfica:  $\psi_1(G) \leq \lfloor \frac{n^2+n}{4} \rfloor$ .

El máximo de los  $\chi_1(\mathbf{G})$  de todas las posibles gráficas geométricas que se pueden dibujar con  $n$  puntos, es llamado *índice cromático geométrico* de  $\mathbf{G}$  y se denota  $\chi_g(\mathbf{G})$ . Sea  $S$  un conjunto de puntos en posición general en el plano. La *gráfica de disyunción*  $D(S)$  tiene como conjunto de vértices a todas las aristas que pueden formarse con los  $n$  puntos de  $S$ . Dos vértices de  $D(S)$  se unen con una arista si y sólo si, las aristas correspondientes en  $S$  son disjuntas. En la tesis [13], los autores estudian el índice cromático de la gráfica geométrica. Entre sus resultados, mediante un algoritmo de búsqueda exhaustiva acotan a  $\chi_g(\mathbf{G})$  para  $3 \leq n \leq 6$ . Los resultados se muestran en la Tabla 3.1.

n	$\chi_g(\mathbf{G})$
3	3
4	4
5	5
6	7

Tabla 3.1: Valores de  $\chi_g(\mathbf{G})$ .

Por otro lado, demuestran los siguientes teoremas para  $\chi_g(\mathbf{G})$ :

**Teorema 3.13.** ([13]) Sean  $n = 2q$ , para  $q \geq 3$  e impar, existe una gráfica geométrica  $\mathbf{G}_g$  de orden  $n$  que necesita al menos  $n + 1$  colores para obtener una coloración propia.

**Teorema 3.14.** ([13]) Sea  $n = 2(q + 1)$ , para  $q \geq 3$  e impar, existe una gráfica geométrica  $\mathbf{G}_g$  de orden  $n$  que necesita al menos  $n + 1$  colores para obtener una coloración propia.

**Teorema 3.15.** ([13]) Sea  $\mathbf{G}$  una gráfica de orden  $n$ , para  $n \geq 6$  y par, su  $\chi_g(\mathbf{G})$  está acotado por:

$$\chi_g(\mathbf{G}) \geq n + 1.$$

Entre otros resultados, también dan la siguiente cota para  $\chi_1(D(S))$ :

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor \leq \chi_1(D(S)) \leq n - \left\lfloor \sqrt{\log n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Una gráfica  $(G)$ , es una *gráfica bipartita* si es posible partir a los vértices de  $(G)$  en dos subconjuntos  $R$  y  $B$ , tal que cada arista de  $(G)$  une a un vértice de  $R$  y con un vértice de  $B$ . Una gráfica es *bipartita geométrica completa* si para cualquier pareja  $(r, b) \in R \times B$ , se tiene que  $rb \in E(K_{m,n})$ , y la denotamos  $K_{m,n}$ . Una gráfica  $K_{m,n}$  es *bipartita geométrica completa* si para cualquier pareja  $(r, b) \in R \times B$ , se tiene que  $rb \in E(K_{m,n})$ . La gráfica  $K_{m,n}$  es separable si los puntos en  $B$  pueden ser separados por una línea recta de los puntos en  $R$ .

En la tesis [4] los autores estudian el índice cromático, acromático y de Grundy para gráficas geométricas. Entre sus resultados, se encuentran las siguientes demostraciones que acotan dichos índices para  $K_{m,n}$ .

**Teorema 3.16.** ([4]) Sea  $k_{m,n}$  una gráfica geométrica bipartita separable, entonces

$$\chi_1(k_{m,n}) = n + m - 1.$$

**Teorema 3.17.** ([4]) Sea  $k_{m,n}$  una gráfica abstracta, entonces

$$\alpha_1(k_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{n(m+1)}{2} \right\rceil.$$

**Teorema 3.18.** ([4]) Sea  $k_{m,n}$  convexa separable, entonces

$$\alpha_1(k_{m,n}) = \tau_1(k_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(n+1)(m+1)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Los trabajos anteriores muestran resultados sobre algunos índices de coloración para la gráfica de intersección de aristas, y para la gráfica bipartita.

Es evidente que en los trabajos mostrados en este capítulo existe la ausencia del estudio del número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos. Un sólo trabajo muestra resultados sobre el número cromático de la gráfica de intersección de triángulos. Esto hace de interés investigar el número de Grundy para la gráfica de intersección de triángulos en esta tesis.



# Capítulo 4

## Resultados: Número de Grundy

En este capítulo mostramos los resultados obtenidos para el número de Grundy de las gráficas de intersección de triángulos. Recordemos que la construcción de este tipo de gráficas esta dada a partir de un conjunto de triángulos abiertos, denotado por  $\mathcal{T}$ . La gráfica de intersección de triángulos  $G_S(\mathcal{T})$  de  $\mathcal{T}$  es una gráfica donde cada vértice representa a un triángulo en  $\mathcal{T}$ , y existe una arista entre dos vértices si y sólo si los triángulos correspondientes se intersectan. El conjunto  $\mathcal{T}$  es determinado por un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano en posición general. Decimos que  $S$  está en posición general si no contiene tres puntos que sean colineales.  $S$  está en posición convexa si los puntos del conjunto forman los vértices de un polígono convexo. Por otro lado, recordemos que para obtener el número de Grundy buscamos una coloración con el máximo número de colores, tal que cada vértice de color  $j$  tenga un vértice adyacente de color  $i$ , para todo  $i < j$ .

Los resultados de esta tesis están divididos en dos partes. En la primera parte damos cotas para cuando  $S$  está en posición convexa, y en la segunda parte damos cotas para cuando  $S$  está en posición general.

### 4.1. Conjunto de Puntos en Posición Convexa

En esta sección presentamos el valor de  $\Gamma(G_S(\mathcal{T}))$ , para la gráfica de intersección de triángulos, cuando  $S$  está en posición convexa. Primero consideramos  $\Gamma(G_S(\mathcal{T}))$  para valores pequeños de  $n$ , y después damos una cota superior y una cota inferior para  $\Gamma(G_S(\mathcal{T}))$  para valores grandes de  $n$ . La cota inferior se obtiene de un conjunto de triángulos que se intersectan tres a tres, dicho conjunto es tomado de [11].

Antes de presentar los resultados, es importante mostrar algunas demostraciones que nos ayudarán a dar nuestra cota inferior. Entre estas demostraciones, está la siguiente, donde mostramos que para  $S$  en posición convexa, el número cromático de  $G_S(\mathcal{T})$  es igual a el número de clan de  $G_S(\mathcal{T})$ . Es decir  $\chi(G_S(\mathcal{T})) = \omega(G_S(\mathcal{T}))$ . Esta prueba la tomamos de [11] y de [8].

Para conjuntos de puntos en posición convexa,  $G_S(\mathcal{T})$  siempre es la misma, sin importar la elección de  $S$ . Entonces supongamos que  $S$  son los  $n$  vértices en el plano de un polígono regular.

**Teorema 4.1** ([11], [8]). Sea  $S$  el conjunto de los  $n$  vértices de un polígono regular  $P$ , y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición convexa:

$$\chi(G_S(\mathcal{T})) = \omega(G_S(\mathcal{T}))$$

**Demostración** Sea  $\mathcal{T}$  el conjunto de triángulos abiertos determinados por  $S$ . Sean  $p$  y  $q$  dos puntos en el centro de  $P$ . Decimos que un triángulo de  $\mathcal{T}$  es *central* si contiene a  $q$  en su interior. Es importante notar que el conjunto de triángulos centrales es un clan de triángulos en  $\mathcal{T}$ , y que es un clan de vértices en  $G_S(\mathcal{T})$ .

Supongamos que  $n$  es par. Por cada punto  $s_i$  de  $S$ , sea

$$s'_i = \begin{cases} s_i + \frac{n}{2} & \text{si } s_i + \frac{n}{2} \leq n \\ s_i + \frac{n}{2} \text{ mód } n & \text{si } s_i + \frac{n}{2} > n. \end{cases}$$

el punto *antípoda* de  $s_i$  en  $S$ . Supongamos que  $\Delta(s_i s_j s_k)$  es un triángulo central de  $\mathcal{T}$ , para  $i \neq j$ ,  $i \neq k$  y  $j \neq k$ . Por cada triángulo central  $\Delta(s_i s_j s_k)$  definimos a  $C(i, j, k)$  como un conjunto independiente con los siguientes cuatro triángulos:  $C(i, j, k) = \{\Delta(s_i s_j s_k), \Delta(s'_i s_j s_k), \Delta(s_i s'_j s_k), \Delta(s_i s_j s'_k)\}$ .

Un triángulo en  $\mathcal{T}$  es *largo* si contiene un par de vértices antípoda. Observemos que  $q$  no está contenido en ningún triángulo largo debido a que  $q$  está sobre una de sus aristas. Movamos a  $q$  un poco de tal forma que para todos los puntos consecutivos  $s_i, s_j \in S$ ,  $q$  esté contenido en el interior de exactamente uno de los triángulos largos  $\Delta(s_i s'_i s_j)$  y  $\Delta(s_i s'_i s'_j)$ . Observemos que existen triángulos largos centrales. Si  $\Delta(s_i s'_i s_j)$  es un triángulo largo central entonces definimos a su conjunto independiente como  $C(i, i, j) = \{\Delta(s_i s'_i s_j), \Delta(s_i s'_i s'_j)\}$ . De esta manera, notemos que cada triángulo en  $\mathcal{T}$  está en un conjunto independiente asociado con un triángulo central.

Sea  $\Delta(s_i s_j s_k)$  un triángulo que no es central. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $s_j s_k$  separa a  $s_i$  de  $q$ , esto implica que  $\Delta(s'_i s_j s_k)$  es un triángulo central y entonces  $\Delta(s_i s_j s_k)$  está en el conjunto independiente asociado a  $\Delta(s'_i s_j s_k)$ .

Ahora supongamos que  $n$  es impar. Por cada punto  $s_i$  de  $S$ , sea

$$s'_i = \begin{cases} s_i + \frac{n+1}{2} & \text{si } s_i + \frac{n+1}{2} \leq n \\ s_i + \frac{n+1}{2} \text{ mód } n & \text{si } s_i + \frac{n+1}{2} > n. \end{cases}$$

el punto *antípoda* de  $s_i$  en  $S$ . Sea  $q$  un punto en el centro de  $S$ . Si  $\Delta(s_i s_j s_k)$  es un triángulo central, tal que en  $\Delta(s_i s_j s_k)$  no hay dos puntos que sean consecutivos y tal que no tenga alguna arista que separe a un punto  $\in S$  de  $q$ , entonces definimos a su conjunto independiente como  $C(i, j, k) = \{\Delta(s_i s_j s_k), \Delta(s'_i s_j s_k), \Delta(s_i s'_j s_k), \Delta(s_i s_j s'_k)\}$ .



Si  $\Delta(s_i s_j s_k)$  es un triángulo central tal que  $s_i$  y  $s_j$  son puntos consecutivos en el sentido de las manecillas del reloj, entonces definimos a su conjunto independiente como  $C(i, j, k) = \{\Delta(s_i s_j s_k), \Delta(s_i s'_j s_k)\}$ . Si  $\Delta(s_i s_j s_k)$  es un triángulo central tal que exista al menos una arista que separe a un punto  $\in S$  de  $q$  y tal que en  $\Delta(s_i s_j s_k)$  no hay dos puntos que sean consecutivos, entonces sea  $s_i$  el punto en  $\Delta(s_i s_j s_k)$  tal que  $s'_i = s_j$  ó  $s'_i = s_k$ . Entonces definimos a su conjunto independiente como  $C(i, j, k) = \{\Delta(s_i s_j s_k), \Delta(s_i s'_j s_k), \Delta(s_i s_j s'_k)\}$ . De esta manera, notemos que cada triángulo en  $\mathcal{T}$  está en un conjunto independiente asociado con un triángulo central. Sea  $\Delta(s_i s_j s_k)$  un triángulo que no es central. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $s_j s_k$  separa a  $s_i$  de  $c$ . Sea

$$x = \begin{cases} s'_{i-1} & \text{si } n-1 \neq 0 \\ s'_n & \text{si } n-1 = 0. \end{cases}$$

Como podemos ver  $x' = s_i$  y además  $\Delta(x s_j s_k)$  es un triángulo central. Entonces  $\Delta(s_i s_j s_k)$  está en el conjunto independiente asociado a  $\Delta(x s_j s_k)$ .

Cada conjunto independiente asociado con un triángulo central es una clase cromática de alguna coloración  $c$  de  $\mathcal{T}$ , es decir que existe un color en  $c$  por cada triángulo central en  $\mathcal{T}$ . Sea  $k$  el número de triángulos centrales en  $\mathcal{T}$ . Como  $c$  es una  $k$  coloración propia de  $G_S(\mathcal{T})$  se tiene que  $\chi(G_S(\mathcal{T})) \leq k$ . Por otra parte el conjunto de triángulos centrales es un clan de  $G_S(\mathcal{T})$  de tamaño  $k$ , por lo que  $k \leq \omega(G_S(\mathcal{T}))$ . Además sabemos que  $\omega(G_S(\mathcal{T})) \leq \chi(G_S(\mathcal{T}))$ . por lo tanto tenemos que  $k \leq \omega(G_S(\mathcal{T})) \leq \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq k$ . Entonces  $\chi(G_S(\mathcal{T})) = k$  y además  $\omega(G_S(\mathcal{T})) = k$ . Es decir  $\omega(G_S(\mathcal{T})) = \chi(G_S(\mathcal{T})) = k$ . □

A continuación demostramos que para  $S$  en posición convexa,  $\chi(G_S(\mathcal{T}))$  es igual al número máximo de 3 ciclos dirigidos en un torneo de  $n$  vértices. Esta prueba la tomamos de [11].

**Teorema 4.2 ( [11]).** Sea  $S$  el conjunto de los  $n$  vértices de un polígono convexo regular, y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Sea  $S'$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general. Consideremos al torneo obtenido por la gráfica completa generada por  $S'$ , que tiene el máximo número de 3 ciclos dirigidos. Sea  $t$  el número de dichos ciclos. Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición convexa:

$$\chi(G_S(\mathcal{T})) = t = \begin{cases} \frac{1}{24}(n-1)n(n+1) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{24}(n-2)n(n+2) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

**Demostración** La demostración se divide en dos partes. Primero demostramos el valor de  $t$  y después demostramos que  $\chi(G_S(\mathcal{T})) = t$ .

- Parte 1.** Consideremos la gráfica completa  $K(S')$  generada por  $S'$ . Sea  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una etiquetación de los vértices de  $S'$ . Consideremos el conjunto de todos los torneos que se pueden obtener a partir de  $k(S')$ , y sea  $D$  el torneo con el máximo número de 3 ciclos dirigidos. Sea  $t$  el número de dichos ciclos.

Es fácil ver que, en cada tripleta  $\{s_i, s_j, s_k\} \notin T$  existe exactamente un vértice con exgrado igual a dos, y existe exactamente un vértice con ingrado igual a dos. Sea  $s_i$  el vértice con  $g^+(s_i) = 2$  en la subgráfica de  $D$  inducida por  $\{s_i, s_j, s_k\}$ ,  $D[\{s_i, s_j, s_k\}]$ . Por cada dos flechas que salen de  $s_i$ , hay un 3 ciclo no dirigido formado con  $s_i$  y con los dos vértices correspondientes a dichas flechas. Entonces existen  $\binom{g^+(s_i)}{2}$  tripletas asociadas a  $s_i$  que no están en  $T$ . Por cada vértice  $s_i$  en  $D$  existen  $\sum_{s_i} \binom{g^+(s_i)}{2}$  tripletas, que no están en  $T$ . Por lo tanto,  $|T| = \binom{n}{3} - \sum_{s_i} \binom{g^+(s_i)}{2}$ .

$|T|$  alcanza su valor máximo cuando  $\sum_{s_i} \binom{g^+(s_i)}{2}$  alcanza su valor mínimo. Esto ocurre cuando los elementos de esta suma están balanceados. Como  $D$  es una digráfica, por el teorema 2.1 sabemos que  $\sum_{s_i} g^+(s_i) = m$ , para  $1 \leq i \leq n$ , donde  $m$  es el tamaño de  $D$ . Como  $D$  es un torneo  $m = \binom{n}{2}$ . Entonces  $\sum_{s_i} g^+(s_i) = \binom{n}{2} = n \binom{n-1}{2}$ . Para balancear la suma tenemos que repartir las  $m$  flechas que salen con cada vértice en  $D$ , de tal manera que a cada vértice le toque aproximadamente la misma cantidad. Si primero repartimos una arista a cada  $s_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , entonces repartimos  $n$  aristas. Para lograr cubrir las  $m$  aristas tenemos que repartir  $n$  aristas  $\frac{n-1}{2}$  veces. Es decir, cada  $s_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , tendrá exgrado  $\frac{n-1}{2}$ . Y así  $n \binom{n-1}{2} = m$ . Cuando  $n$  es par  $n-1$  es impar, entonces una mitad de sus vértices tienen exgrado  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \frac{n}{2}$  y la otra mitad de sus vértices tienen exgrado  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-2}{2}$ . Y así,

$$\binom{\frac{n}{2}}{2} \binom{\frac{n}{2}}{2} + \binom{\frac{n}{2}}{2} \binom{\frac{n-2}{2}}{2} = \binom{\frac{n}{2}}{2} \left( \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 \right) = \binom{\frac{n}{2}}{2} (n-1) = n \binom{\frac{n-1}{2}}{2} = m.$$

Por lo tanto,

$$t \leq \begin{cases} \binom{n}{3} - n \binom{\frac{n-1}{2}}{2} & = \frac{1}{24} (n-1)n(n+1) \quad \text{si } n \text{ es impar} \\ \binom{n}{3} - \frac{n}{2} \binom{\frac{n-2}{2}}{2} - \frac{n}{2} \binom{\frac{n}{2}}{2} & = \frac{1}{24} (n-2)n(n+2) \quad \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

- Parte 2.** Sea  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una etiquetación de los vértices de  $S$ . Sea  $q$  un punto cerca del centro del polígono formado por el conjunto  $S$ , como en el teorema 4.1. Sea  $T'$  el conjunto de triángulos determinados por  $S$  que contienen a  $q$  en su interior, es decir, el conjunto de triángulos centrales. Sea  $D'$  un torneo de la gráfica completa generada por  $S$ .  $D'$  es obtenido de la siguiente manera: cada arista  $s_i s_j$  es dirigida de  $s_i$  a  $s_j$  si  $s_j$  está en el orden de las manecillas del reloj de  $s_i$  en el triángulo  $s_i s_j q$ . Sea  $T''$  el conjunto de 3 ciclos dirigidos en  $D'$ . Podemos ver que hay una tripleta en  $T''$  sí y sólo sí está en  $T'$ . Esto es porque si existiera una tripleta en  $T''$  que no está en  $T'$ , entonces esta tripleta tendría al

menos una arista que está dirigida de  $s_i$  a  $s_j$ , si  $s_j$  está en el orden antihorario de  $s_i$  en el triángulo  $s_i s_j q$ , pero esto no puede pasar por la forma en que se le asigna una dirección a cada arista de  $D'$ . Ahora supongamos que existe una tripleta en  $T'$  que no está en  $T''$ . Entonces esta tripleta en  $D'$  tiene un vértice con exgrado dos, esto quiere decir que  $q$  está a la derecha de las flechas que salen de dicho vértice, entonces  $q$  está fuera de la tripleta, pero esto no puede pasar por que esta tripleta en  $T''$  es central.

Entonces  $t$  es al menos el número de triángulos centrales que a su vez por el teorema 4.1 es igual a  $\chi(G_S(\mathcal{T}))$ . Podemos ver que si  $n$  es impar, cada vértice en  $D'$  tiene exgrado igual a  $\frac{n-1}{2}$ . Y si  $n$  es par, una mitad de los vértices en  $D'$  tiene exgrado igual a  $\frac{n}{2}$  y la otra mitad tiene exgrado igual a  $\frac{n-2}{2}$ . Por el análisis de la Parte 1 tenemos que  $|T'| = t$  y por el teorema 4.1 tenemos que  $|T'| = \chi(G_S(\mathcal{T}))$ . Entonces esto muestra que  $t = \chi(G_S(\mathcal{T}))$ .

Finalmente, por todo lo anterior tenemos:

$$\chi(G_S(\mathcal{T})) = t = \begin{cases} \frac{1}{24}(n-1)n(n+1) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{24}(n-2)n(n+2) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

□

En el siguiente teorema demostramos que para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición convexa con  $n = 3, 4, 5$  ó  $6$ ,  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) = \omega(G_S(\mathcal{T}))$ .

**Teorema 4.3.** Sea  $S$  el conjunto de los  $n$  vértices de un polígono regular, y  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Sea  $q$  el centro de dicho polígono. Para cualquier conjunto  $S$  de tamaño  $n = 3, 4, 5$  ó  $6$  en posición conexas:

$$\Gamma(G_S(\mathcal{T})) = \omega(G_S(\mathcal{T})).$$

**Demostración** Un triángulo en  $\mathcal{T}$  es central si contiene a  $q$  en su interior. Un triángulo en  $\mathcal{T}$  es largo si contiene un par de vértices antípoda. Sea  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una etiquetación de  $S$  en el sentido de las manecillas del reloj. Dividimos en dos partes esta demostración.

- Para  $n = 3$ .  
Para este caso es evidente que sólo puede formarse un triángulo, al cual sólo se le puede asignar un color. Entonces  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) = 1 = \omega(G_S(\mathcal{T}))$ .
- Para  $n = 4, 5$  ó  $6$ .  
Por contradicción, supongamos que  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) = k$  tal que  $k > \omega(G_S(\mathcal{T}))$ . Entonces existe una  $k$  coloración de Grundy de  $G_S(\mathcal{T})$ . Sea  $c$  una  $k$  coloración de

Grundy de  $G_S(\mathcal{T})$ . Cada uno de los colores  $\{1, 2, \dots, k\}$  es una clase cromática de  $c$ . Como estamos suponiendo que  $k > \omega(G_S(\mathcal{T}))$ , entonces existe al menos una clase cromática sin triángulos centrales. Sea  $a$  dicha clase. Notemos que para  $n = 4$  y  $n = 5$  no hay triángulos largos no centrales. Sin embargo si los hay para  $n = 6$ . A continuación para  $n = 4, 5$  y  $6$  mostramos una coloración eligiendo de  $a$  un triángulo no central del tipo  $\Delta(s_i s_{i+1} s_{i+2})$ , y posteriormente para  $n = 6$ , mostramos otra coloración eligiendo un triángulo largo no central.

Sea  $\Delta(s_i s_{i+1} s_{i+2})$  un triángulo no central de  $a$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Llamemos a dicho triángulo  $t$ . Como  $t$  es un triángulo no central entonces  $s_i s_{i+2}$  separa a  $s_{i+1}$  de  $q$ . Sea  $t'$  uno de los dos triángulos centrales que tienen a la arista  $s_i s_{i+2}$  y sea  $b$  su color en  $c$ .

- Si  $a > b$   
Como  $c$  es una coloración de Grundy, debe existir un triángulo de color  $b$  que interseque a  $t$ . Esto no ocurre porque no existe ningún triángulo que interseque a  $t$  y que no interseque a  $t'$ .
- Si  $b > a$   
Como  $c$  es una coloración de Grundy, debe existir un triángulo de color  $a$  que interseque a  $t'$ , y que no interseque a  $t$ . Para  $n = 4$  esto no ocurre porque no existe ningún triángulo que interseque a  $t'$ , y que no interseque a  $t$ . Supongamos que para  $n = 5$  y  $n = 6$  ese triángulo existe, y llamémosle  $t^*$ . Por otra parte, consideremos a  $t''$ , el triángulo central con arista  $s_i s_{i+2} \neq t'$ . Sea  $c$  el color de  $t''$  en  $c$ .
  - Si  $a > c$   
Como  $c$  es una coloración de Grundy, debe existir un triángulo de color  $c$  que interseque a  $t$  y a  $t^*$ . Es fácil ver que no existe ningún triángulo de color  $c$  que interseque a  $t$ , pues cualquier triángulo que interseque a  $t$  necesariamente interseca a  $t''$ .
  - Si  $c > a$   
Como  $c$  es una coloración de Grundy, debe existir un triángulo de color  $a$  que interseque a  $t''$ , pero esto es imposible pues de existir dicho triángulo necesariamente intersecaría a  $t^*$  ó a  $t$ .

A continuación para  $n = 6$  mostramos una coloración eligiendo de la clase  $a$  un triángulo largo no central. Recordemos que en  $a$  no hay triángulos centrales. Sea  $t$  un triángulo largo no central en  $a$ , como  $t$  es largo, contiene una arista formada por dos puntos antípoda, llamemos  $s_i$  y  $s'_i$  a dichos puntos. Sea  $t'$  uno de los dos triángulos centrales que tienen a la arista  $s_i s'_i$  y sea  $b$  su color en  $c$ .

- Si  $a > b$   
Como  $c$  es una coloración de Grundy, debe existir un triángulo de color  $b$

que intersekte a  $t$ . Supongamos que ese triángulo existe, y llamémosle  $t^*$ . Por otra parte, consideremos a  $t''$ , el triángulo largo no central con arista  $s_i s'_i \neq t$ . Sea  $c$  el color de  $t''$  en  $\mathbf{c}$ .

○ Si  $b > c$

Como  $\mathbf{c}$  es una coloración de Grundy, debe existir un triángulo de color  $c$  que intersekte a  $t'$  y a  $t^*$ . Es fácil ver que no existe ningún triángulo de color  $c$  que intersekte a  $t^*$ , pues cualquier triángulo que intersekte a  $t^*$  necesariamente intersecta a  $t''$ .

○ Si  $c > b$

Como  $\mathbf{c}$  es una coloración de Grundy, debe existir un triángulo de color  $b$  que intersekte a  $t''$ , pero esto es imposible pues de existir dicho triángulo necesariamente intersectaría a  $t'$  ó a  $t^*$ .

● Si  $b > a$

Esto es equivalente al caso  $b > a$  eligiendo de  $a$  un triángulo no central del tipo  $\Delta(s_i s_{i+1} s_{i+2})$ .

□

### 4.1.1. Cota Inferior

A continuación damos una cota inferior para el número de Grundy de  $G_S(\mathcal{T})$  cuando  $S$  está en posición convexa. El siguiente teorema es una consecuencia del teorema 4.1 y de las definiciones del capítulo 2. Este teorema muestra que el número cromático es una cota inferior para el número de Grundy. Es decir  $\chi(G_S(\mathcal{T})) < \Gamma(G_S(\mathcal{T}))$ .

**Teorema 4.4.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa, y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición convexa:

$$\frac{n^3}{24} + O(n^2) = \omega(G_S(\mathcal{T})) = \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T}))$$

**Demostración** La demostración se divide en dos partes.

■ Primero demostramos que  $\chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T}))$

Sabemos que  $\chi(G_S(\mathcal{T}))$  es el mínimo número para el cual  $G_S(\mathcal{T})$  tiene una coloración propia. Por otro lado  $\Gamma(G_S(\mathcal{T}))$  es el máximo número para el cual  $G_S(\mathcal{T})$  tiene una coloración de Grundy y una coloración de Grundy es una coloración propia. Esto muestra que  $\chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T}))$ . También en el teorema 2.5 se exhibe una  $k$  coloración propia tal que  $\chi(G_S(\mathcal{T})) \leq k \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T}))$ .

■ Sea  $k = \frac{n^3}{24} + O(n^2)$ . En el teorema 4.1 los autores dan una coloración propia de  $G_S(\mathcal{T})$  con  $k$  colores. Por lo tanto se tiene  $\chi(G_S(\mathcal{T})) \leq k$ . Por otra parte, en ese mismo teorema los autores exhiben un clan de tamaño  $k$ , por lo que  $k \leq \omega(G_S(\mathcal{T}))$ . Además sabemos que  $\omega(G_S(\mathcal{T})) \leq \chi(G_S(\mathcal{T}))$ , por lo tanto tenemos que  $k \leq \omega(G_S(\mathcal{T})) \leq \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq k$ . Entonces  $\chi(G_S(\mathcal{T})) = k$  y

además  $\omega(G_S(\mathcal{T})) = k$ . Es decir  $\omega(G_S(\mathcal{T})) = \chi(G_S(\mathcal{T})) = k$ . Por el teorema 4.2 tenemos que  $k = \frac{n^3}{24} + O(n^2)$ , entonces:  $\omega(G_S(\mathcal{T})) = \chi(G_S(\mathcal{T})) = \frac{n^3}{24} + O(n^2)$ .

Por lo anterior tenemos que:

$$\frac{n^3}{24} + O(n^2) = \omega(G_S(\mathcal{T})) = \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T}))$$

□

El conjunto de triángulos de tamaño  $\frac{n^3}{24} + O(n^2)$  del teorema 4.1, es un conjunto de puntos que comparten un punto en común. Es decir, la intersección de todos estos triángulos es no vacía. Una pregunta que nos parece interesante es determinar el tamaño máximo del conjunto de triángulos en  $\mathcal{T}$  en el que cada par de triángulos se intersectan, pero tal que la intersección de todos sea vacía. Nosotras encontramos un conjunto de triángulos en  $\mathcal{T}$  que cumple con lo anterior y que tiene tamaño  $\frac{n^2}{8}$ . Por el teorema de Helly sabemos que para cualquier conjunto de  $n \geq d + 1$  convexos en  $\mathbb{R}^d$ , si cualesquiera  $d + 1$  convexos tienen intersección no vacía, entonces la intersección de todos los convexos es no vacía.

**Teorema 4.5 (Teorema de Helly).** Sea  $K$  una familia de  $n \geq d + 1$  convexos en  $\mathbb{R}^d$ . Si cada  $d + 1$  convexos de  $K$  tienen un punto en común, entonces existe un punto en común en todos los convexos de  $K$ .

Es importante mencionar que en los trabajos de la literatura de Geometría Combinatoria, sólo se ha estudiado la intersección de triángulos que comparten un punto en común. Es decir, que en dichos conjuntos cualesquiera tres triángulos se intersectan. Hasta donde sabemos, es la primera vez que se estudia la intersección del conjunto de triángulos tal que cualquier pareja se intersecte pero que la intersección de todos sea vacía. A continuación mostramos nuestro resultado.

**Teorema 4.6.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Sea  $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$  el conjunto máximo de triángulos, tal que cualquier par de triángulos en  $\mathcal{T}^*$  se intersectan, pero la intersección de todos sea vacía.

$$\frac{n^2}{8} \leq |\mathcal{T}^*|$$

.

### ***Demostración***

En esta demostración construimos dos conjuntos de puntos y mostramos que uno de ellos cumple con las características que buscamos.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa. Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que los  $n$  puntos están sobre una circunferencia. Sea  $l$  una recta que divide a  $S$  en 2 partes,  $A$  y  $B$ ,

- Si  $n$  es par.
  - Si  $\frac{n}{2}$  es par, entonces  $A$  debe contener  $\frac{n}{2}$  puntos de  $S'$  y  $B$  debe contener  $\frac{n}{2}$  puntos de  $S'$ .
  - Si  $\frac{n}{2}$  es impar, entonces  $A$  debe contener  $\frac{n}{2} - 1$  puntos de  $S'$  y  $B$  debe contener  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de  $S'$ .
- Si  $n$  es impar.
  - Si  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  es par, entonces  $A$  debe contener  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  puntos de  $S'$  y  $B$  debe contener  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos de  $S'$ .
  - Si  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  es par, entonces  $A$  debe contener  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos de  $S'$  y  $B$  debe contener  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  puntos de  $S'$ .

Orientemos a  $l$  de tal forma que  $A$  esté a su derecha. Sea  $m = |A|$  y  $o = |B|$ ,  $m + o = n$ . Sea  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  una etiquetación de los puntos en  $A$  en el orden de las manecillas del reloj a partir de  $l$ . De igual forma, sea  $\{b_1, b_2, \dots, b_o\}$  una etiquetación de los puntos en  $B$  en el orden de las manecillas del reloj a partir de  $l$ . Considérese el siguiente conjunto  $E$  de  $\frac{m}{2}$  aristas formadas con los puntos de  $A$ ,  $E = \{a_1 a_m, a_2 a_{m-1}, \dots, a_{\frac{m}{2}} a_{n - (\frac{m}{2} - 1)}\}$ . Sea  $\mathcal{T}'$  el conjunto de triángulos formados por cada arista en  $E$  y cada punto en  $B$ . Por cada arista en  $E$  hay  $o$  triángulos en  $\mathcal{T}'$ , y así:

- Si  $n$  es par.
  - Si  $\frac{n}{2}$  es par. Como  $A$  contiene  $\frac{n}{2}$  puntos entonces  $E$  tiene  $\frac{n}{2} = \frac{n}{4}$  aristas. Como  $B$  contiene  $\frac{n}{2}$  puntos entonces hay  $\frac{n^2}{8}$  triángulos en  $\mathcal{T}'$ .
  - Si  $\frac{n}{2}$  es impar. Como  $A$  contiene  $\frac{n}{2} - 1$  puntos entonces  $E$  tiene  $\frac{\frac{n}{2} - 1}{2}$  aristas. Como  $B$  contiene  $\frac{n}{2} + 1$  puntos entonces hay  $\frac{n^2}{8} - \frac{1}{2}$  triángulos en  $\mathcal{T}'$ .
- Si  $n$  es impar.
  - Si  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  es par. Como  $A$  contiene  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  puntos, es decir  $\frac{n-1}{2}$  puntos, entonces  $E$  tiene  $\frac{\frac{n-1}{2}}{2}$  aristas. Como  $B$  contiene  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos, es decir  $\frac{n+1}{2}$  puntos, entonces hay  $\frac{n^2}{8} - \frac{1}{8}$  triángulos en  $\mathcal{T}'$ .
  - Si  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  es par. La cuenta es igual a la anterior.

El conjunto de triángulos  $\mathcal{T}'$  que acabamos de describir no necesariamente es el conjunto que nos interesa. A continuación construimos otro conjunto de triángulos y mostramos que o bien  $\mathcal{T}'$  es el conjunto deseado, o lo es el nuevo conjunto.

Supongamos que  $\mathcal{T}'$  no es un conjunto de la forma que nos interesa. Tomemos la arista  $a_{\frac{m}{2}} a_{n - (\frac{m}{2} - 1)}$  en  $A$ , que es la arista más alejada de la recta  $l$ . Sea  $t_1$  el triángulo  $\triangle(a_{\frac{m}{2}} a_{n - (\frac{m}{2} - 1)} b_1)$  y sea  $t_2$  el triángulo  $\triangle(a_{\frac{m}{2}} a_{n - (\frac{m}{2} - 1)} b_o)$ . Orientemos a la arista  $a_{\frac{m}{2}} b_1$

con dirección de  $a_{\frac{m}{2}}$  a  $b_1$ . Definimos a  $r$  como el número de puntos a la izquierda de  $a_{\frac{m}{2}}b_1$ . Sea  $e$  la arista orientada:

$$e = \begin{cases} a_{\frac{m}{2}}b_1 & , \text{ si } r \text{ es par} \\ a_{\frac{m}{2}}b_2 & , \text{ si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

Sea  $A'$  el subconjunto de  $S$  que contiene a los siguientes puntos:

- Si  $r + 2 = m$ , entonces  $A'$  contiene a los puntos de  $e$  y a los puntos a la izquierda de  $e$ .
- Si  $r + 2 < m$ . Definimos a  $x = m - (r + 2)$ . Entonces  $A'$  contiene a los puntos de  $e$ , a los puntos a la izquierda de  $e$ , a los  $\frac{x}{2}$  puntos más cercanos a  $a_{\frac{m}{2}}$  del lado derecho de  $e$ , y a los  $\frac{x}{2}$  puntos más cercanos a  $b_i$  del lado derecho de  $e$ .

Observemos que  $|A'| = |A|$ . Sea  $B' = S \setminus A'$ , es claro que  $|B'| = |B|$ . Definimos a  $l'$  como la recta que separa a  $A'$  de  $B'$ . Orientemos a  $l'$  de tal forma que  $A'$  esté a su derecha. Sea  $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_m\}$  una etiquetación de los puntos en  $A'$  en el orden de las manecillas del reloj a partir de  $l'$ . Sea  $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_o\}$  una etiquetación de los puntos en  $B'$  en el orden de las manecillas del reloj a partir de  $l'$ . De igual forma, sea  $\mathcal{T}''$  el conjunto de triángulos formados por cada arista en  $A'$  y cada punto en  $B'$ . Tomemos la arista  $a'_{\frac{m}{2}}a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}$  en  $A'$ . Sea  $t'_1$  el triángulo  $\triangle(a'_{\frac{m}{2}}a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}b'_1)$  y sea  $t'_2$  el triángulo  $\triangle(a'_{\frac{m}{2}}a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}b'_o)$ . Sea

$$e' = \begin{cases} a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}b'_o & , \text{ si } r \text{ es par} \\ a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}b'_{o-1} & , \text{ si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

Los puntos de  $e'$  pertenecen a  $A$ . El área de intersección de  $t_1$  y  $t_2$  está definida por tres puntos:  $a_{\frac{m}{2}}$ ,  $a_{n-(\frac{m}{2}-1)}$  y un tercero al que llamamos  $p$ . Sea  $s$  el segmento de recta formado por los puntos  $a_{\frac{m}{2}}$  y  $p$ . Sean  $a'_{\frac{m}{2}}$ ,  $a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}$  y  $p'$  los tres puntos que definen el área de intersección de  $t'_1$  y  $t'_2$  y sea  $s'$  el segmento de recta formado por los puntos  $a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}$  y  $p'$ . Por nuestra suposición  $\mathcal{T}'$  no es un conjunto de triángulos en el que cada par de triángulos se intersecten y que la intersección de todos sea vacía, entonces por el teorema de Helly la intersección de todos los triángulos en  $\mathcal{T}'$  es no vacía. Esta intersección debe estar en el área de intersección de  $t_1$  y  $t_2$ . Supongamos, por contradicción que  $\mathcal{T}''$  tampoco es de la forma que nos interesa. Entonces  $e'$  tiene que estar dentro de la intersección de  $t_1$  y  $t_2$ . Y además  $e$  tiene que estar en la intersección de  $t'_1$  y  $t'_2$ . Pero esto no puede pasar porque:

- Si  $r$  es par. Entonces  $e$  debe intersectar a  $e'$  en  $s'$  y  $e'$  debe intersectar a  $e$  en  $s$ . Es decir  $e$  y  $e'$  deben intersectarse en dos puntos, lo cual es imposible.
- Si  $r$  es impar. Entonces  $e$  debe intersectar a  $s'$  y  $e'$  debe intersectar a  $s$ . Para intentar que esto suceda debemos acercar a  $e$  lo más posible a  $a_{\frac{m}{2}}b_1$  y acercar a  $e'$  lo más posible a  $a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}b'_o$ . Y además  $a_{\frac{m}{2}}b_1$  debe intersectar a  $a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}b'_o$  en  $s'$  y  $a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}b'_o$  debe intersectar a  $a_{\frac{m}{2}}b_1$  en  $s$ . Es decir  $a_{\frac{m}{2}}b_1$  y  $a'_{n-(\frac{m}{2}-1)}b'_o$  deben intersectarse en dos puntos, lo cual es imposible.



Concluimos que si  $\mathcal{T}'$  no es el conjunto que buscamos,  $\mathcal{T}''$  sí lo es. Y por el contrario, si  $\mathcal{T}''$  no es el conjunto que buscamos,  $\mathcal{T}'$  sí lo es. Tanto la cardinalidad de  $\mathcal{T}'$  como la de  $\mathcal{T}''$  es  $\frac{n^2}{8}$ . Por lo tanto:

$$\frac{n^2}{8} \leq |\mathcal{T}^*|.$$

□

### 4.1.2. Cota Superior

A continuación damos una cota superior del número de Grundy para  $G_S(\mathcal{T})$  cuando  $S$  está en posición convexa.

**Teorema 4.7.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa, y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición convexa:

$$\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})) = \frac{4n^3}{27} + O(n^2).$$

**Demostración** Primero demostramos que  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$  y después damos el valor de  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

Supongamos que  $k$  es el número de Grundy de  $G_S(\mathcal{T})$ , entonces existe una  $k$ -coloración de Grundy de  $G_S(\mathcal{T})$ . Cada triángulo  $t$  de  $\mathcal{T}$  coloreado de color  $k$  interseca al menos un triángulo coloreado con color  $i$ , para cualquier  $1 \leq i \leq k-1$ . Entonces el grado de  $t$  es al menos  $k-1$  y a lo sumo es el grado máximo de  $G_S(\mathcal{T})$ . Es decir,  $k-1 \leq \text{grado}(t) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ . Y así, se acota por arriba a  $\Gamma(G_S(\mathcal{T}))$ , es decir  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})) + 1$ . Esto es equivalente a:  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ . A continuación daremos el valor de  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

Sea  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una etiquetación de  $S$  en el orden de las manecillas del reloj. Sea  $\Delta(s_i s_j s_k)$  un triángulo determinado por  $S$  al que llamamos  $t$ , donde  $i < j < k$ . El grado de  $t$  está dado por el número total de triángulos determinados por  $S$ , menos el número de triángulos que no intersecan a  $t$ , menos  $t$ . Los puntos de una arista de  $t$ , y los puntos que están entre esta arista forman triángulos que no intersecan a  $t$ . Entonces los triángulos que no intersecan a  $t$  están dados de esta forma por cada arista de  $t$ . Es decir, el grado de  $t$  es de la siguiente forma:

$$\text{grado}(t) = \binom{n}{3} - \binom{(s_j - s_i - 1) + 2}{3} - \binom{(s_k - s_j - 1) + 2}{3} - \binom{((n + s_i) - s_k - 1) + 2}{3} - 1.$$

Como estamos buscando el grado máximo de  $G_S(\mathcal{T})$ , nos interesa el máximo  $\text{grado}(t)$  de todos los triángulos de  $\mathcal{T}$ . Es decir,  $\max_t \text{grado}(t)$ . Esto lo encontramos cuando los puntos que no son parte de  $t$  están distribuidos de forma equivalente entre cada arista de  $t$ . Cuando  $n \bmod 3 = 1$  o  $n \bmod 3 = 2$  los puntos que no son parte de  $t$  deben estar distribuidos lo más balanceado posible. Es decir, el grado máximo de  $G_S(\mathcal{T})$  es:

- Para  $n \pmod 3 = 0$ . En las aristas de  $t$  existen  $\frac{n-3}{3}$  puntos entre cada arista, entonces:

$$\Delta(G_S(\mathcal{T})) = \binom{n}{3} - \left( 3 \binom{\frac{n-3}{3}+2}{3} \right) - 1 = \frac{4n^3}{27} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1.$$

- Para  $n \pmod 3 = 1$ . En dos aristas de  $t$  existen  $\frac{n-4}{3}$  puntos entre cada arista y entre una arista de  $t$  existen  $\frac{n-1}{3}$  puntos, entonces:

$$\Delta(G_S(\mathcal{T})) = \binom{n}{3} - \left( 2 \binom{\frac{n-4}{3}+2}{3} + \binom{\frac{n-1}{3}+2}{3} \right) - 1 = \frac{4n^3}{27} - \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{18} - \frac{28}{27}.$$

- Para  $n \pmod 3 = 2$ . En dos aristas de  $t$  existen  $\frac{n-2}{3}$  puntos entre cada arista y entre una arista de  $t$  existen  $\frac{n-5}{3}$  puntos, entonces:

$$\Delta(G_S(\mathcal{T})) = \binom{n}{3} - \left( 2 \binom{\frac{n-2}{3}+2}{3} + \binom{\frac{n-5}{3}+2}{3} \right) - 1 = \frac{4n^3}{27} - \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{18} - \frac{26}{27}.$$

Como ya tenemos el valor de  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$  y además demostramos que  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ , entonces:

$$\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})) = \frac{4n^3}{27} + O(n^2).$$

□

## 4.2. Conjunto de Puntos en Posición General

En esta sección damos cotas para  $\Gamma(G_S(\mathcal{T}))$ , para la gráfica de intersección de triángulos de un conjunto de puntos en posición general.

### 4.2.1. Cota Inferior

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . A continuación damos una cota inferior para el número de Grundy de  $G_S(\mathcal{T})$ .

**Teorema 4.8.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección de los triángulos abiertos en  $\mathcal{T}$  determinados por  $S$ . Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general:

$$\frac{n^3}{27} + O(n^2) \leq \omega(G_S(\mathcal{T})) \leq \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T})).$$

**Demostración** Por el teorema 3.1 se tiene que por cada conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general, existe un punto  $q$  en el plano que está en el interior de al menos  $\frac{n^3}{27} + O(n^2)$  triángulos determinados por  $S$ . Estos triángulos forman un clan en  $\mathcal{T}$ . Por definición sabemos que el orden de un clan  $\leq \omega(G_S(\mathcal{T}))$ , por el colorario 2.4 sabemos que  $\omega(G_S(\mathcal{T})) \leq \chi(G_S(\mathcal{T}))$  y por el teorema 2.5 sabemos que  $\chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T}))$ . Entonces:

$$\frac{n^3}{27} + O(n^2) \leq \omega(G_S(\mathcal{T})) \leq \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T})).$$

□

### 4.2.2. Cota Superior

En este apartado presentamos la cota superior del número de Grundy para  $G_S(\mathcal{T})$  cuando  $S$  está en posición general no convexa. Antes de presentar los resultados es necesario demostrar una cota inferior y una cota superior para  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$  el grado máximo de  $G_S(\mathcal{T})$ .

Sea  $\Delta_{\min}(n) = \min\{\Delta(G_S(\mathcal{T})) \mid S \text{ es un conjunto de } n \text{ puntos en posición general}\}$ .

Antes de presentar el valor de  $\Delta_{\min}(n)$ , es decir la cota inferior de  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ , demostramos que el triángulo que realiza el grado máximo en  $S$ , es vacío. Es decir, no contiene puntos de  $S$  en su interior.

**Teorema 4.9.** El triángulo de un conjunto tal que su grado es igual a  $\Delta_{\min}(n)$ , es un triángulo vacío.

**Demostración** Definimos a  $t$  como el triángulo de un conjunto al que pertenece  $\Delta_{\min}(n)$ . Por contradicción, supongamos que  $t$  no es vacío, entonces al menos tiene un punto en su interior. Supongamos que  $t$  tiene exactamente un punto en su interior. El grado de  $t$  está dado por los triángulos que no tienen a  $p$  como punto y que intersectan a  $t$ , más los triángulos que tienen a  $p$  como punto y que intersectan a  $t$ . Estos triángulos que tienen a  $p$  como punto, son  $\binom{n-1}{2}$ .

Si sacamos a  $p$  fuera de  $t$ , entonces sea  $e$  la arista tal que la recta que pasa por  $e$  separa a  $t$  de  $p$ . Entonces, existe al menos un triángulo que tiene a  $p$  y que ya no intersecta a  $t$ . Dicho triángulo está formado por  $p$  y  $e$ . Ahora, el número de triángulos que tienen a  $p$  y que intersectan a  $t$  son a lo sumo  $\binom{n-1}{2} - 1$ . Entonces el grado de  $t$  disminuye en al menos 1. Esto muestra que si  $t$  es vacío, su grado es más pequeño. Pero puede ser que al sacar a  $p$  de  $t$ ,  $t$  deja de ser el triángulo de grado máximo. Supongamos que ahora el triángulo de grado máximo es  $t'$ . Si  $t'$  es vacío pues ya terminamos. Si  $t'$  no es vacío, al menos tiene un punto en su interior. Como vimos anteriormente podemos sacar uno de sus puntos e ir disminuyendo su grado, hasta que  $t'$  sea un triángulo vacío. Esto lo podemos hacer todas las veces necesarias con cada triángulo no vacío de grado máximo hasta lograr que el triángulo de grado máximo sea vacío. □

A continuación damos el valor de  $\Delta_{\min}(n)$ , y demostramos que uno de los  $S$  que minimiza el grado máximo de la gráfica de intersección de triángulos, es el conjunto de puntos en posición convexa. Como resultado, damos una cota inferior para  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

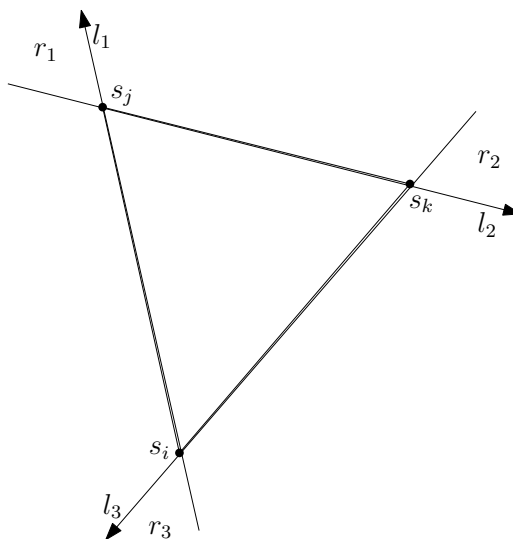
**Teorema 4.10.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección de los triángulos abiertos en  $\mathcal{T}$  determinados por  $S$ . Sea  $S'$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa, y sea  $G_{S'}(\mathcal{T}')$  la gráfica de intersección de los triángulos abiertos en  $\mathcal{T}'$  determinados por  $S'$ .

$$\Delta_{\min}(n) = \frac{4n^3}{27} + O(n^2) = \Delta(G_{S'}(\mathcal{T}')) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$$

**Demostración** Sea  $S^*$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, y sea  $G_{S^*}(\mathcal{T}^*)$  la gráfica de intersección de los triángulos abiertos en  $\mathcal{T}^*$  determinados por  $S^*$  tal que  $\Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) = \Delta_{\min}(n)$ . Sea  $\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*\}$  una etiquetación de los puntos de  $S^*$ . Consideremos el triángulo de grado máximo de  $\mathcal{T}^*$  denotado como  $t = \Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)$ . Sea  $l_1$  la recta que pasa por  $s_i^* s_j^*$ ,  $l_2$  la recta que pasa por  $s_j^* s_k^*$ , y  $l_3$  la recta que pasa por  $s_k^* s_i^*$ . Orientemos a  $l_1$ ,  $l_2$ , y  $l_3$  de tal manera que cada una de las rectas deje a  $t$  de su lado derecho. Tomemos la intersección de la región a la izquierda de  $l_1$ , de la región a la izquierda de  $l_2$  y de la región a la izquierda de  $l_3$ . Esta intersección está formada por tres regiones. Sea  $r_1$  la región de intersección de la región a la izquierda de  $l_1$  y la región de intersección de la región a la izquierda de  $l_2$ . Sea  $r_2$  la región de intersección de la región a la izquierda de  $l_2$  y de la región a la izquierda de  $l_3$ . Sea  $r_3$  la región de intersección de la región a la izquierda de  $l_3$  y de la región a la izquierda de  $l_1$ . Esto lo podemos observar en la figura 4.1. Como ya sabemos por el teorema 4.9,  $t$  tiene que ser vacío. Entonces no debe haber puntos de  $S^*$  en  $r_1$ ,  $r_2$ , ó  $r_3$ , porque existiría al menos un triángulo no vacío con grado mayor a  $t$ . Por ejemplo, supongamos que en  $r_1$  hay un punto  $s_x^*$ . Entonces el triángulo formado por  $s_i^*$ ,  $s_k^*$  y  $s_x^*$ , tendría un grado mayor que  $t$  porque cualquier triángulo que intersekte a  $t$  intersekte a  $\Delta(s_i^*, s_k^*, s_x^*)$  y además a  $\Delta(s_i^*, s_k^*, s_x^*)$  lo intersektan todos los triángulos que contienen a  $s_j^*$  como vértice.

Sea  $A$  los puntos de  $S^*$  que están a la izquierda de  $l_1$ ,  $B$  los puntos de  $S^*$  que están a la izquierda de  $l_2$ , y  $C$  los puntos que están a la izquierda de  $l_3$ . El grado de  $t$  es el número total de triángulos en  $\mathcal{T}^*$  menos los triángulos que no lo intersektan. Los triángulos que no intersektan a  $t$  son formados por  $s_i^*$ ,  $s_j^*$  y los puntos en  $A$ ; los triángulos formados por  $s_j^*$ ,  $s_k^*$  y los puntos en  $B$ , y los triángulos formados por  $s_k^*$ ,  $s_i^*$  y los puntos en  $C$ . Es decir, el grado de  $t$  es:  $\text{grado}(t) = \binom{n}{3} - \binom{|A|+2}{3} - \binom{|B|+2}{3} - \binom{|C|+2}{3}$ . Como  $t$  es el triángulo de grado máximo, tenemos que minimizar el número de triángulos que no lo intersektan. Esto se logra, cuando los puntos en  $S^*$  menos los puntos de  $t$  están distribuidos de la mejor forma equivalente en  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

Siempre y cuando los puntos en  $A$ ,  $B$  y  $C$ , estén en posición general, el número de triángulos que no intersektan a  $t$  será el mismo. Entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que están en posición convexa. Así, el conjunto  $S^*$  es equivalente al conjunto  $S'$ . Entonces por el teorema 4.7 tenemos que  $\Delta(G_{S'}(\mathcal{T}')) = \frac{4n^3}{27} + O(n^2)$ .


 Figura 4.1: Triángulo  $t$  de grado máximo

Y finalmente como  $\mathcal{T}^*$  es el conjunto que minimiza el grado máximo de todos los conjuntos  $\mathcal{T}$  determinados por un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general, tenemos que:

$$\Delta_{\min}(n) = \frac{4n^3}{27} + O(n^2) = \Delta(G_{S'}(\mathcal{T}')) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})).$$

□

A continuación exhibimos un conjunto  $S^*$  de  $n$  puntos en posición general (no convexa), para el cual el grado máximo del conjunto de triángulos abiertos  $\mathcal{T}^*$  determinados por  $S^*$  es igual a  $\Delta_{\min}(n)$ . Y además  $\Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*))$  es equivalente al grado máximo de  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$  para  $S$  en posición convexa.

**Teorema 4.11.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa, y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Existe  $S^*$  un el conjunto de  $n$  puntos en posición general no convexa, para el cual  $\Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) = \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

**Demostración** Primero construimos el conjunto  $S^*$  de  $n$  puntos en posición general no convexa. Después demostramos que  $\Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) = \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ . Para demostrar esto, mostramos que siempre existe un triángulo en  $\mathcal{T}^*$  cuyo grado es igual a  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ . Finalmente demostramos que cualquier triángulo en  $\mathcal{T}^*$  tiene grado menor o igual a  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

$S^*$  es un conjunto con  $m$  puntos en su cierre convexo, y  $o$  puntos en su interior. Para conjuntos de puntos en posición convexa, sabemos que el conjunto de triángulos determinados por esta clase de conjuntos siempre es el mismo, sin importar la posición

de los puntos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los  $m$  puntos de  $S$  son los  $m$  vértices de un polígono regular  $P$ . Llamamos  $A \subseteq S$  al subconjunto de puntos en posición convexa y  $B$  al resto. Los valores de  $m$  y  $o$  son los siguientes:

- Si  $n = 5$ ,  $m = 4$  y  $o = 1$ .
- Si  $n \bmod 3 = 0$ ,  $m = \frac{2n}{3}$  y  $o = \frac{n}{3}$ .
- Si  $n \bmod 3 = 1$ ,  $m = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$  y  $o = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .
- Si  $n \bmod 3 = 2$ ,  $m = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$  y  $o = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ .

Sea  $E$  el conjunto de las  $m$  aristas que forman el cierre convexo de  $S^*$ , y sea  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  una etiquetación de las aristas en  $E$  en el orden de las manecillas del reloj. Decimos que  $e_i \in E$  es impar si  $i$  es impar, y decimos que  $e_i$  es par si  $i$  es par.

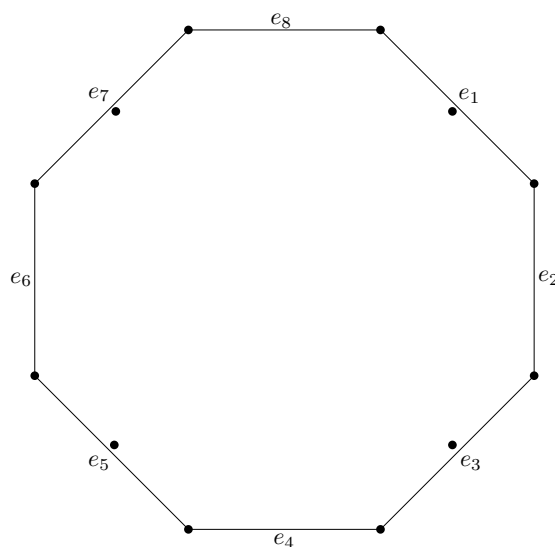
- Si  $m$  es par. Colocamos a cada punto de  $B$  tan cerca como sea posible del punto medio de cada arista impar de  $E$ .
- Si  $m$  es impar.
  - Si  $o = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ . Colocamos a cada punto de  $B$  tan cerca como sea posible del punto medio de las aristas impares:  $e_1, e_3, \dots, e_{m-2}$ .
  - Si  $o = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ . Colocamos a un punto de  $B$  tan cerca como sea posible del punto medio de la arista  $e_m$ , y a los otros puntos como en el inciso anterior.

Esta construcción nos asegura que a lo sumo un triángulo en  $\mathcal{T}^*$  tendrá dos puntos en su interior, esto sucede cuando  $m$  es impar y  $o = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , y ocurre con el único triángulo que tiene a las aristas  $e_1$  y  $e_m$ . Los demás triángulos a lo sumo tendrán un punto en su interior. En la figura 4.2, podemos ver el conjunto  $S^*$  con 12 puntos,  $|A| = 8$  y  $|B| = 4$ .

A continuación demostramos que existe un triángulo  $t^*$  en  $\mathcal{T}^*$  tal que  $\text{grado}(t^*) = \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ . Sea  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  una etiquetación de los puntos en  $A$  en el orden de las manecillas del reloj. Como  $A$  está en posición convexa por el teorema 4.7 sabemos cómo es el triángulo de grado máximo de  $A$ . Sea  $\Delta(a_f a_g a_h)$ ,  $a_f, a_g, a_h \in A$ ,  $f < g < h$ , un triángulo de grado máximo en  $A$ .

- Si  $\binom{m-3}{3} \bmod 3 \neq 0$ . Entonces existe al menos una arista de  $\Delta(a_f a_g a_h)$ , tal que entre el par de puntos de esta arista existen  $\lfloor \frac{m-3}{3} \rfloor$  puntos. Sea  $a_f a_g$  dicha arista. Definimos a  $e_1$  como la arista  $a_g a_{g-1}$  y re-etiquetemos las aristas de  $E$  a partir de  $e_1$ , en el orden de las manecillas del reloj.

Y como por construcción los puntos en  $B$  están tan cerca como es posible del punto medio de algunas aristas en  $E$ , entonces  $t^* = \Delta(a_f a_g a_h)$ , y  $\text{grado}(t^*) = \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

Figura 4.2:  $S^*$  para  $n = 12$ .

A continuación mostramos que el grado de cualquier triángulo en  $\mathcal{T}^*$  es menor o igual al  $\text{grado}(t^*)$ . Sea  $p$  el centro de  $P$ , y sea  $\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*\}$  una etiquetación de los puntos de  $S^*$  en el orden radial a  $p$ . Sea  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una etiquetación de los puntos de  $S$  en el orden de las manecillas del reloj. Al triángulo  $\Delta(s_i s_j s_k)$  en  $\mathcal{T}$  le asociamos el triángulo  $\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)$  en  $\mathcal{T}^*$ . Nótese que el  $\text{grado}(\Delta(s_i s_j s_k))$  no es necesariamente igual al  $\text{grado}(\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*))$ . Todos los triángulos en  $\mathcal{T}$  son vacíos. Es decir, no hay triángulos que contengan puntos de  $S$  en su interior. El triángulo  $\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)$  en  $\mathcal{T}^*$  equivalente al triángulo  $\Delta(s_i s_j s_k)$  en  $\mathcal{T}$ , puede ser de los siguientes tres tipos:

- **Tipo A.** Si  $\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)$  es un triángulo vacío, entonces  $\text{grado}(\Delta(s_i s_j s_k)) - 3 \leq \text{grado}(\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)) \leq \text{grado}(\Delta(s_i s_j s_k))$ . Esto sucede cuando al menos uno de los puntos  $s_i^*$ ,  $s_j^*$  y  $s_k^*$  está en el interior de la envolvente convexa de  $S^*$ .
- **Tipo B.** Si  $\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)$  es un triángulo con un punto en su interior, entonces  $\text{grado}(\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)) = \text{grado}(\Delta(s_i s_j s_k)) + 1$ . Esto sucede cuando  $\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)$  tiene una arista formada de puntos consecutivos en la envolvente convexa de  $S^*$ .
- **Tipo C.** Si  $\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)$  es un triángulo con dos puntos en su interior, entonces  $\text{grado}(\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)) = \text{grado}(\Delta(s_i s_j s_k)) + 2$ . Esto sucede cuando  $\Delta(s_i^* s_j^* s_k^*)$  tiene dos aristas formadas de puntos consecutivos en la envolvente convexa de  $S^*$ .

Como deseamos demostrar que el grado de cualquier triángulo en  $\mathcal{T}^*$  es menor o igual al  $\text{grado}(t^*)$ , entonces tenemos que demostrar que el grado de cualquier triángulo en  $\mathcal{T}$  es menor o igual a  $\Delta(G_S(\mathcal{T})) - 2$ . Sea  $t'$  el triángulo de grado máximo en  $\mathcal{T}$ . Por una parte sabemos que el grado de cualquier triángulo en  $\mathcal{T}$  es menor o igual que  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ . Además por el teorema 4.7 conocemos el valor de  $\text{grado}(t') = \frac{4n^3}{27} + O(n^2)$ . Analicemos al grado de los triángulos en  $\mathcal{T}$  que son triángulos de tipo A en  $\mathcal{T}^*$ . El grado de cualquier triángulo tipo A en  $\mathcal{T}^*$  no puede sobrepasar el grado de  $t'$ . Esto

es porque su grado en  $\mathcal{T}^*$  disminuye en a lo sumo 3. A continuación analizamos el grado de los triángulos en  $\mathcal{T}$  que son triángulos de tipo B, o de tipo C en  $\mathcal{T}^*$ .

- Triángulos de tipo B. Un triángulo de tipo B en  $\mathcal{T}^*$  es un triángulo  $t_b = \Delta(s_i s_{i+2} s_k)$  en  $\mathcal{T}$ , tal que  $s_k \neq s_{i+1}$ . Para este tipo de triángulos deseamos que  $\text{grado}(t') - \text{grado}(t_b) \geq 1$ . Deseamos encontrar el valor de  $\text{grado}(t_b)$  para cualquier  $t_b$ . Sea  $a$  el número de puntos entre los puntos  $s_k$  y  $s_i$ . Sea  $b$  el número de puntos entre los puntos  $s_{i+2}$  y  $s_k$ . Entonces el grado para cualquier triángulo  $t_b$  es el siguiente,  $\text{grado}(t_b) = \binom{n}{3} - \binom{a+2}{3} - \binom{b+2}{3} - 1 - 1$ . Es decir, el número total de triángulos menos los triángulos que pueden formarse con los puntos entre la arista  $s_k s_i$ , menos los triángulos que pueden formarse con los puntos entre la arista  $s_{i+2} s_k$ , menos el triángulo  $\Delta(s_i s_{i+1} s_{i+2})$  y menos  $t_b$ . De estos triángulos nos interesa el triángulo  $t_b^*$  que tiene el grado más grande sobre todos los triángulos  $t_b$ . Este triángulo lo encontramos maximizando  $\text{grado}(t_b)$ . Esto sucede cuando:

- $(n - 3)$  es par:  $a = \frac{n-3}{2}$  puntos y  $b = \frac{n-3}{2} - 1$  puntos. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{grado}(t_b^*) &= \binom{n}{3} - \binom{\frac{n-3}{2} + 2}{3} - \binom{\frac{n-3}{2} - 1 + 2}{3} - 1 - 1 = \\ &= \binom{\frac{n-3}{2} + 2}{3} - \binom{\frac{n-3}{2} + 1}{3} - 2 = \frac{n^3}{8} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{8} - \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

- $(n - 3)$  es impar:  $a = b = \frac{n-1}{2}$  puntos. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{grado}(t_b^*) &= \binom{n}{3} - \binom{\frac{n-1}{2} + 2}{3} - \binom{\frac{n-1}{2} - 1 + 2}{3} - 1 - 1 = \\ &= \binom{n}{3} - 2 \binom{\frac{n-1}{2} + 2}{3} - 2 = \frac{n^3}{8} - \frac{5n^2}{8} + \frac{3n}{8} - \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que  $\text{grado}(t') - \text{grado}(t_b) \geq 1$ . Es decir:

$$\left(\frac{4n^3}{27} + O(n^2)\right) - \left(\frac{n^3}{8} + O(n^2)\right) \geq 1$$

$$\frac{5n^3}{216} \geq 1.$$

- Triángulos de tipo C. Un triángulo de tipo C en  $\mathcal{T}^*$  es un triángulo  $t_c = \Delta(s_i s_{i+2} s_{i+4})$  en  $\mathcal{T}$ . Para este tipo de triángulos deseamos que  $\text{grado}(t') - \text{grado}(t_c) \geq 2$ . Deseamos encontrar el valor de  $\text{grado}(t_c)$  para cualquier  $t_c$ . El grado para cualquier triángulo  $t_c$  es el siguiente,  $\text{grado}(t_c) = \binom{n}{3} - \binom{n-5}{3} - 2 - 1$ .



Es decir, el número total de triángulos menos los triángulos que pueden formarse con los puntos entre la arista  $s_i s_{i+4}$ , menos los triángulos  $\Delta(s_i s_{i+1} s_{i+2})$  y  $\Delta(s_{i+2} s_{i+3} s_{i+4})$ , y menos  $t_c$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \text{grado}(t_c) &= \binom{n}{3} - \binom{n-5}{3} - 3 = \\ &= \frac{5n^2}{2} - \frac{35n}{2} + 32. \end{aligned}$$

Y así tenemos que  $\text{grado}(t') - \text{grado}(t_c) \geq 2$ . Es decir:

$$\left(\frac{4n^3}{27} + O(n^2)\right) - \left(\frac{5n^2}{2} + O(n)\right) \geq 2.$$

Como demostramos que el grado de cualquier triángulo en  $\mathcal{T}$  que no sea un triángulo de grado máximo es menor o igual a  $\Delta(G_S(\mathcal{T})) - 2$ , esto asegura que el grado de cualquier triángulo en  $\mathcal{T}^*$  es menor o igual a  $\text{grado}(t^*)$ . Es decir  $\Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) = \text{grado}(t^*) = \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

□

Sea  $\Delta_{\text{máx}}(n) = \text{máx}\{\Delta(G_S(\mathcal{T})) \mid S \text{ es un conjunto de } n \text{ puntos en posición general}\}$ .

A continuación exhibimos un conjunto  $S^*$  de  $n$  puntos en posición general tal que  $\Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) = \Delta_{\text{máx}}(n)$ . Damos el valor de  $\Delta_{\text{máx}}(n)$ , el cual es una cota superior para  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

**Teorema 4.12.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, y  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Definimos a  $S^*$  como el conjunto de  $n$  puntos en posición general, y a  $G_{S^*}(\mathcal{T}^*)$  como la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}^*$  de los triángulos abiertos determinados por  $S^*$ , tal que  $\Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) = \Delta_{\text{máx}}(n)$ . Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general:

$$\Delta(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) = \frac{n^3}{6} + O(n^2).$$

**Demostración**  $S^*$  es el conjunto tal que hay tres puntos en la envolvente convexa de  $S^*$  y  $n - 3$  puntos en el interior de la envolvente convexa de  $S^*$ . Esto quiere decir que la envolvente convexa de  $S^*$  es un triángulo en  $\mathcal{T}^*$  y que además todos los demás triángulos en  $\mathcal{T}^*$  están en el interior de dicho triángulo. Es decir todos los triángulos en  $\mathcal{T}^*$  intersectan al triángulo de la envoltura convexa. Entonces este triángulo es el triángulo de grado máximo en  $\mathcal{T}^*$ .

A continuación demostramos que  $\mathcal{T}^*$  es el conjunto que maximiza el grado máximo de cualquier  $G_S(\mathcal{T})$ . Por contradicción, supongamos que existe otro conjunto  $S'$  de  $n$

puntos en posición general tal que  $\Delta(G_{S'}(\mathcal{T}')) > \Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*))$ . Entonces el triángulo  $t$  de grado máximo en  $\mathcal{T}'$  a lo sumo debe tener en su interior  $n - 4$  puntos de  $S'$ . Esto quiere decir que al menos un punto de  $S'$  está afuera de  $t$  y entonces al menos existe un triángulo en  $\mathcal{T}'$  formado por el punto fuera de  $t$  y alguna arista de  $t$ , que no interseca a  $t$ . Esto quiere decir que  $\Delta(G_{S'}(\mathcal{T}')) = \Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) - 1$ .

Así el grado máximo de cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general es a lo sumo  $\binom{n}{3} - 1 = \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} - 1$ . Teniendo así:

$$\Delta(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_{S^*}(\mathcal{T}^*)) = \binom{n}{3} - 1 = \frac{n^3}{6} + O(n^2) = \Delta_{\max}(n).$$

□

A continuación damos la cota superior del número de Grundy para  $G_S(\mathcal{T})$  cuando  $S$  está en posición general. El siguiente corolario se sigue del teorema anterior.

**Corolario 4.13.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, y sea  $G_S(\mathcal{T})$  la gráfica de intersección del conjunto  $\mathcal{T}$  de los triángulos abiertos determinados por  $S$ . Para cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general:

$$\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})) \leq \frac{n^3}{6} + O(n^2).$$

**Demostración** Primero demostramos que  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$  y después damos el valor de  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

Supongamos que  $k$  es el número de Grundy de  $\mathcal{T}$ , entonces existe una  $k$ -coloración de Grundy de  $\mathcal{T}$ . Cada triángulo  $t$  de  $\mathcal{T}$  coloreado de color  $k$  interseca al menos un triángulo coloreado con color  $i$ , para cualquier  $1 \leq i \leq k-1$ . Entonces el grado de  $t$  es al menos  $k-1$  y a lo sumo es el grado máximo de  $\mathcal{T}$ . Es decir,  $k-1 \leq \text{grado}(t) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ . Y así, se acota por arriba a  $\Gamma(G_S(\mathcal{T}))$ , es decir  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ .

Por el teorema 4.11 y por el teorema 4.12 tenemos que  $\frac{4n^3}{27} + O(n^2) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})) \leq \frac{n^3}{6} + O(n^2)$ . Además demostramos que  $\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$ , entonces:

$$\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})) \leq \frac{n^3}{6} + O(n^2).$$

□

## Capítulo 5

# Resultados Experimentales

En este capítulo explicamos el programa que desarrollamos. El cual nos ayudó a obtener las cotas para el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos. También explicamos los resultados obtenidos al ejecutar dicho programa. Nuestro objetivo principal es encontrar coloraciones glotonas que nos ayuden a definir las cotas para el número de Grundy de  $G_S(\mathcal{T})$ .

Nuestro programa lee un conjunto de puntos. Genera la gráfica de intersección de los triángulos formados por dicho conjunto. Después realiza un número de veces la coloración glotona. Este número es definido por el usuario. Por cada coloración glotona que realiza, se genera una etiquetación aleatoria de los vértices de la gráfica de intersección de los triángulos. Por cada coloración que realiza también se obtiene el número de colores utilizado en esa coloración. Nuestro programa almacena el número de colores más grande utilizado en alguna de las coloraciones, y también almacena la respectiva coloración. Finalmente nuestro programa entrega como salida a este número como un posible número de Grundy y almacena las clases cromáticas en archivos. Por cada color en la coloración se genera un archivo. La información que contienen estos archivos es la adecuada para poder observar en *gnuplot* los triángulos de cada clase cromática.

Este programa lo realizamos con el lenguaje de programación  $C++$ , utilizando el ambiente de programación *Xcode*. Dicho programa esta disponible en la siguiente liga: <http://computacion.cs.cinvestav.mx/~abjuarez/colGreedy.zip>. Realizamos pruebas con conjuntos de puntos en posición convexa y con diversos conjuntos de puntos en posición general. Es importante mencionar que tomamos estos conjuntos de puntos de la base de datos en [3]. Dicha base de datos contiene todos los conjuntos combinatoriamente distintos para conjuntos de tamaño  $3 \leq n \leq 10$ . A dichos conjuntos les llamamos tipos de orden. Es decir hay tantos tipos de orden como conjuntos combinatoriamente distintos haya. Así que nuestras pruebas las realizamos para conjuntos de puntos desde  $n = 3$  hasta  $n = 10$ .

El programa está formado por cinco clases: *edge*, *vertex*, *graph*, *color* y *fileIn*. La

clase *edge* es una lista que representa las aristas de una gráfica. La clase *vertex* la utilizamos para representar un vértice de una gráfica y para representar un punto de algún conjunto de puntos. En esta clase guardamos valores como sus coordenadas y su color asignado en las coloraciones, entre otros. La clase *color* la ocupamos para representar un color de la coloración obtenida como óptima. En esta clase escribimos en archivos los triángulos que son coloreados con este color. La clase *fileIn* la utilizamos para leer la base de datos de donde obtenemos los conjuntos de puntos. Y finalmente la clase *graph* la utilizamos para representar nuestro tipo de gráfica y para representar los conjuntos de puntos. Esta clase está formada por la lista de la clase *edge*, un arreglo de objetos de tipo *vertex*, un arreglo de objetos de tipo *color* y un objeto de tipo *fileIn*, entre otros valores. Además contiene varios métodos, uno de ellos genera la gráfica de intersección de triángulos, otro calcula el número de Grundy y uno más realiza la coloración glotona.

Nuestro programa principal recibe cuatro parámetros. Todos los parámetros son de tipo entero. El primer parámetro representa el tipo de conjunto de puntos que leemos de la base de datos. El valor 0 representa el conjunto de puntos en posición convexa, y el valor 1 representa el conjunto de puntos en posición general. El segundo parámetro representa el número de puntos del conjunto de puntos a leer. El tercer parámetro indica el número de coloraciones que deseamos se prueben. Y finalmente el último parámetro indica el tipo de orden del conjunto de puntos que deseamos leer. En el algoritmo 2 podemos ver la entrada y salida de nuestro programa, así como los pasos principales que realiza.

---

**Algoritmo 2** Búsqueda del posible número de Grundy

---

**Entrada:** Tipo de conjunto de puntos, número de puntos del conjunto de puntos, número de coloraciones a ejecutar, y tipo de orden del conjunto.

**Salida:** Posible número de Grundy y la coloración de la gráfica de intersección de triángulos que obtuvo dicho número.

- 1: Leer el conjunto de puntos correspondiente a los parámetros introducidos en el programa.
  - 2: Generar la gráfica de intersección de triángulos.
  - 3: Buscar el número de Grundy.
  - 4: Guardar las clases cromáticas en archivos. Estas clases son las correspondientes a la coloración que obtuvo el posible número de Grundy.
- 

A continuación explicamos de forma breve los pasos del algoritmo 2. En el punto 2, se genera una nueva gráfica con  $\binom{n}{3}$  vértices. Además calculamos las intersecciones de cada triángulo para formar las aristas de la gráfica. En el punto 3 por cada iteración indicada en los parámetros de entrada, damos una etiquetación de los vértices de la gráfica. Con esta etiquetación realizamos una coloración glotona que nos entrega el número de colores utilizados. En cada iteración se guarda el número más grande de colores utilizados y la coloración correspondiente. Al final de todas las iteraciones

guardamos en archivos las clases cromáticas de la coloración que se mantuvo con el número más grande de colores. Dicho número es un posible número de Grundy del conjunto de puntos ejecutado.

El número de formas en que el conjunto de  $\binom{n}{3}$  vértices de la gráfica se puede etiquetar es de  $\binom{n}{3}! = \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}\right)!$ . Y este es el número de veces que tendríamos que realizar la coloración glotona para conocer el número de Grundy de la gráfica. Para conjuntos de puntos  $n = 4$  y  $n = 5$  se realizó este número de coloraciones. Para  $3 \leq n \leq 10$  se hicieron 10000 coloraciones por cada conjunto y se tomó el número más grande de colores utilizado en una de estas coloraciones. Elegimos este número de coloraciones porque para un número mayor a 10000 coloraciones el número de colores se mantenía constante. Además, debido a que encontrar el número de Grundy es un problema *NP*-difícil nuestro objetivo no es determinar computacionalmente el número de Grundy ni tampoco obtener cotas mediante los resultados de nuestro programa, únicamente es obtener coloraciones glotonas que nos ayuden a comprobar nuestras cotas y que nos ayuden a observar las características y el comportamiento de las coloraciones.

La manera en que etiquetamos los vértices de la gráfica puede verse en el algoritmo 3. En cada iteración generamos una etiquetación mediante este algoritmo, y la tomamos como entrada para el algoritmo 1 de coloración glotona. Como vimos anteriormente el espacio de búsqueda para el número de Grundy es muy grande y la probabilidad de elegir cualquier etiquetación de las  $\binom{n}{3}!$  etiquetaciones (incluso la etiquetación que nos da como resultado el número de Grundy) es de  $\frac{1}{\binom{n}{3}!}$ .

---

**Algoritmo 3** Etiquetación de vértices de una gráfica

---

**Entrada:** Vértices de la gráfica.

**Salida:** Etiquetación de los vértices.

- 1: **para**  $1 \leq i \leq \binom{n}{3}$  **hacer**
  - 2:   Generar un vértice aleatorio de los  $\binom{n}{3}$  vértices de la gráfica, que no se le haya asignado alguna etiqueta.
  - 3:   Asignar a este vértice la etiqueta  $v_i$ .
  - 4: **fin para**
- 

A continuación daremos los resultados de las ejecuciones que realizamos en el programa. Como se mencionó anteriormente, para cada conjunto de tamaño  $n = 4$  y  $n = 5$  se realizaron las  $\binom{n}{3}!$  coloraciones. Es decir, para  $n = 4$  se realizaron las 24 etiquetaciones que pueden formarse y para  $n = 5$  se realizaron las 3628800 etiquetaciones que pueden formarse. Para cada conjunto de tamaño  $n \geq 6$  se realizaron 10000 coloraciones. En cada una de esas coloraciones se realizó una etiquetación con el algoritmo 3. Para conjuntos de tamaño  $4 \leq n \leq 7$  probamos todos los tipos de orden de la base de datos [3]. Para conjuntos de tamaño  $n > 7$  decidimos probar

$n$	4	5	6	7	8	9	10
Número máximo de colores	2	5	8	17	24	34	46

Tabla 5.1: Posible número de Grundy para conjuntos de  $4 \leq n \leq 10$  puntos en posición convexa.

$n$	4	5	6	7	8	9	10
Número máximo de colores	2	5	9	17	25	34	48

Tabla 5.2: Posible número de Grundy para conjuntos de  $4 \leq n \leq 10$  puntos en posición general.

100 tipos de orden elegidos de manera aleatoria. Esto porque el rango de tipos de orden para cada uno de estos valores de  $n$  es muy grande, se encuentra entre 3315 y 14309547. Para estos valores de  $n$ , una ejecución de nuestro programa tarda al menos 8 segundos y a lo sumo 60 segundos. Entonces para probar todos los tipos de orden de cada uno de estos valores de  $n$  el programa tardaría al menos 26520 segundos y a lo sumo 858572829 segundos. Por el tiempo de trabajo de tesis, para algunos de estos conjuntos no sería posible probar todos sus tipos de orden. Otra razón es porque los valores del posible número de Grundy que nos arroja nuestro programa por cada tipo de orden, varían sólo en 4 unidades.

Posición convexa es un tipo de orden. A continuación en la tabla 5.1 mostramos el número más grande de colores que obtuvimos de alguna coloración realizada por nuestro programa, para conjuntos de  $4 \leq n \leq 10$  puntos en posición convexa.

A continuación en la tabla 5.2 mostramos el número más grande de colores que obtuvimos de alguna coloración de algún tipo de orden ejecutado por nuestro programa, para conjuntos de  $4 \leq n \leq 10$  puntos en posición general.

En la gráfica 5.1, para conjuntos de  $4 \leq n \leq 10$  puntos en posición convexa, mostramos los valores de la tabla 5.1. También podemos ver la cota cerrada para  $4 \leq n \leq 6$  que obtuvimos en el teorema 4.3. Para  $7 \leq n \leq 10$  la cota inferior obtenida en el teorema 4.4, y la cota superior obtenida en el teorema 4.7. Además podemos ver que el posible número de Grundy experimental está más cercano a la cota inferior teórica.

Como podemos ver estos resultados nos confirman que para los conjuntos de puntos de tamaño  $n = 4$ ,  $n = 5$ , y  $n = 6$  en posición convexa, su número de Grundy es igual al número de clan de la gráfica de intersección de triángulos. Esto lo demostramos en el teorema 4.3. En la gráfica 5.2, para conjuntos de  $4 \leq n \leq 10$  puntos en posición general mostramos los valores de la tabla 5.2 y la cota inferior obtenida en el teorema 4.8. En la gráfica 5.3, para conjuntos de  $4 \leq n \leq 10$  puntos en posición general mostramos los valores de la tabla 5.2 y la cota superior obtenida en el teorema 4.13.

Estos resultados nos confirman que para los conjuntos de puntos de tamaño

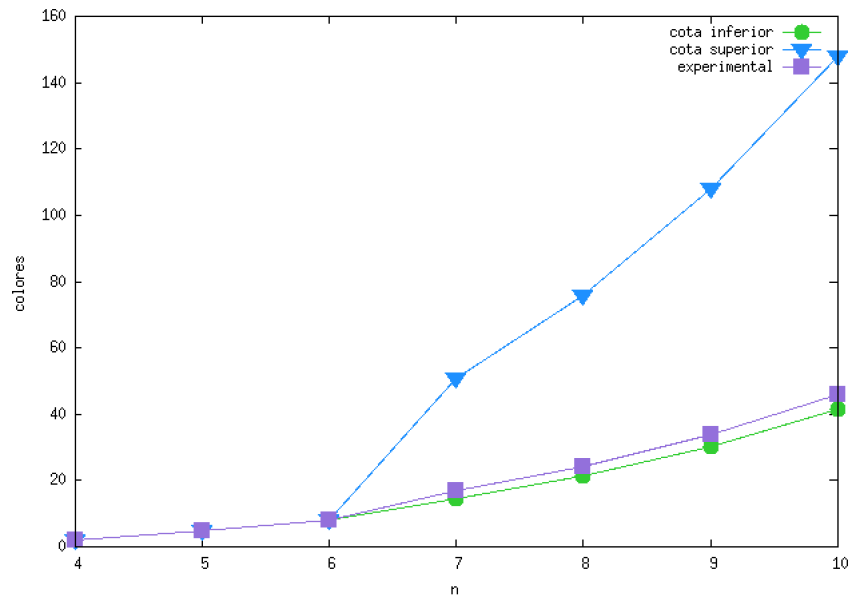


Figura 5.1: Prueba experimental, cota inferior y cota superior para  $G_S(\mathcal{T})$  de  $\mathcal{T}$  determinado por conjuntos de puntos en posición convexa.

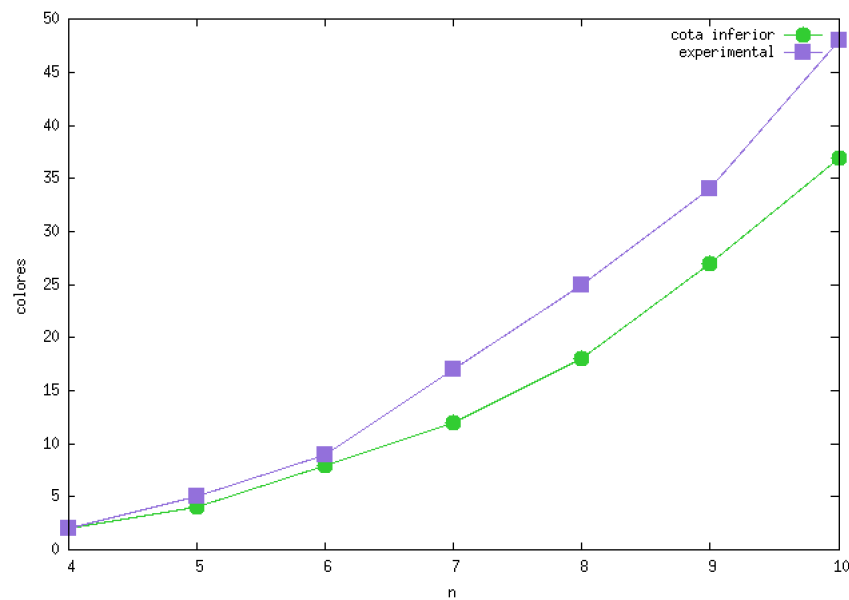


Figura 5.2: Prueba experimental y cota inferior para  $G_S(\mathcal{T})$  de  $\mathcal{T}$  determinado por conjuntos de puntos en posición general.

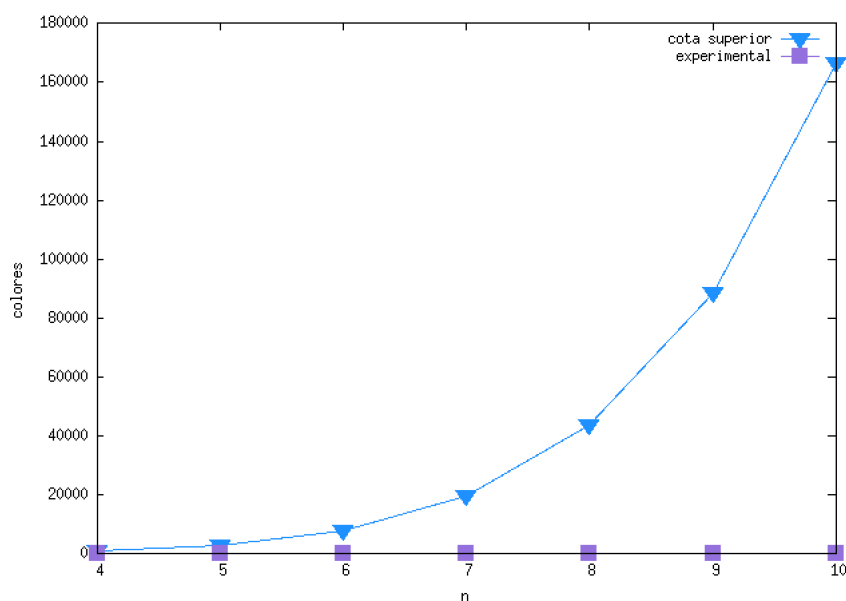


Figura 5.3: Prueba experimental y cota superior para  $G_S(\mathcal{T})$  de  $\mathcal{T}$  determinado por conjuntos de puntos en posición general.

$7 \leq n \leq 10$  en posición convexa, su número de Grundy es mayor al número de clan de la gráfica de intersección de triángulos, pero además nuestros resultados experimentales están más cercanos a la cota inferior que encontramos que a la cota superior. Para conjuntos de puntos en posición general también vemos que nuestros resultados experimentales están más cercanos a la cota inferior y muy alejados de nuestra cota superior.

Además al graficar las clases cromáticas de las coloraciones que arrojaron un número mayor de colores, nos ayudaron a observar que para cada coloración glotona de conjuntos de puntos en posición convexa, la clase cromática de color 1 tiene los triángulos que forman alguna triangulación del conjunto. Y esto es siempre cierto, tomemos una de estas coloraciones glotonas y llamémosle  $c$ . Imaginemos que la clase cromática de color 1 no contiene a todos los triángulos de alguna triangulación inducida por los triángulos que están en dicha clase. Entonces al menos existe un triángulo de alguna triangulación inducida por los triángulos que están en dicha clase que no está en la clase cromática de color 1. Llamemos a este triángulo  $t$ . Como  $t$  no está en la clase cromática de color 1, está en una clase cromática  $i > 1$ . Como  $c$  también es una coloración de Grundy y como  $1 < i$ , entonces  $t$  debe intersectar al menos un triángulo de la clase cromática de color 1, pero esto no sucede porque como  $t$  es un triángulo de una triangulación inducida por los triángulos en la clase cromática de color 1 no existe algún triángulo en esta clase que intersecte a  $t$ .

De igual forma para cada coloración glotona de conjuntos de puntos en posición



general, la clase cromática de color 1 es una triangulación que al menos contiene a los puntos de la envoltura convexa de dicho conjunto. A continuación mostramos en las figuras 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, como se ven las clases cromáticas de color 1 para algunos conjuntos. Estas clases las graficamos con el programa *Gnuplot*.

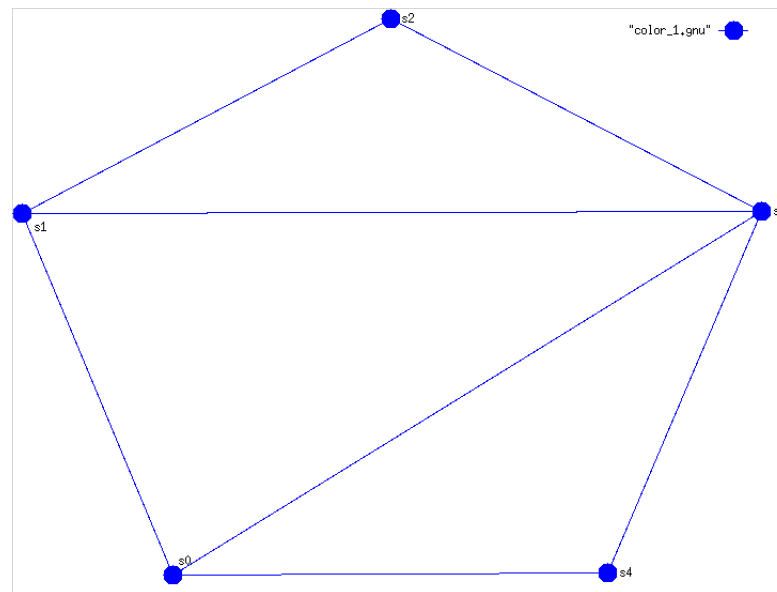


Figura 5.4: Clase cromática de color 1 para conjunto de puntos de tamaño  $n = 5$  en posición convexa.

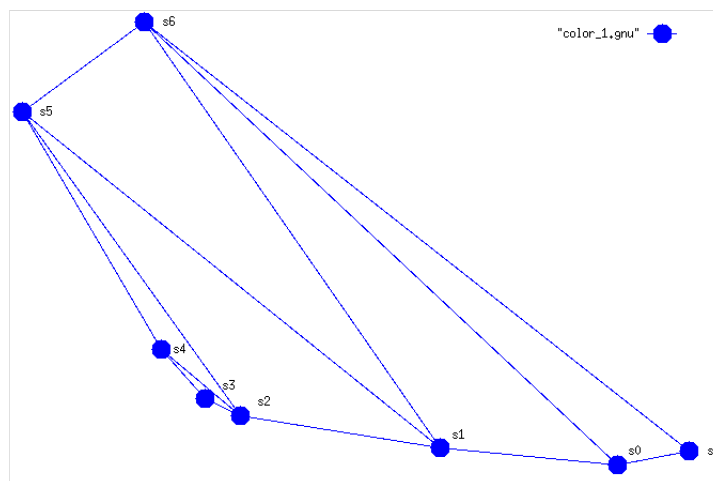


Figura 5.5: Clase cromática de color 1 para conjunto de puntos de tamaño  $n = 8$  en posición convexa.

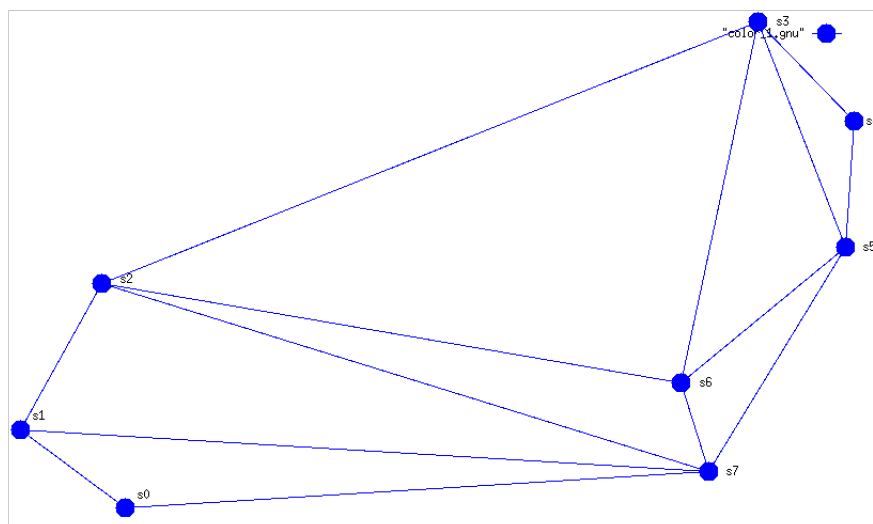


Figura 5.6: Clase cromática de color 1 para conjunto de puntos de tamaño  $n = 8$  en posición general.

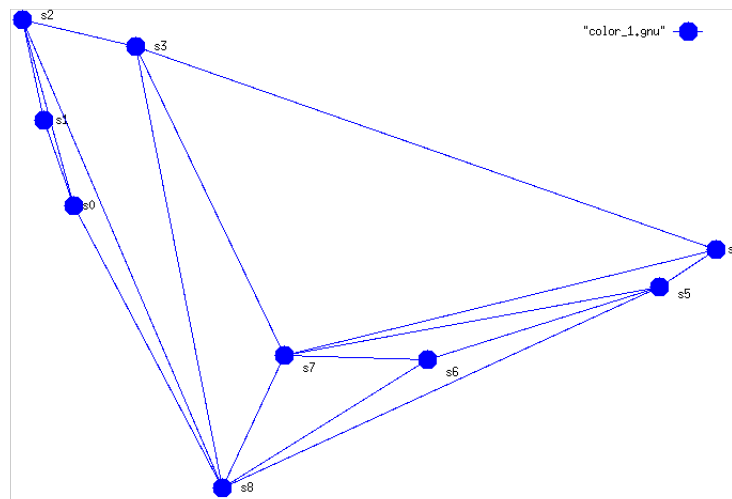


Figura 5.7: Clase cromática de color 1 para conjunto de puntos de tamaño  $n = 9$  en posición convexa.



# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajo a Futuro

En esta tesis estudiamos coloraciones en gráficas de intersección de triángulos. La gráfica de intersección de triángulos es una gráfica definida a partir de un conjunto de triángulos abiertos, donde cada vértice representa a un triángulo del conjunto, y existe una arista entre dos vértices si y sólo si los triángulos correspondientes se intersectan. El conjunto de triángulos abiertos está determinado por un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general. Una coloración de Grundy de los vértices de una gráfica consiste en que cada par de vértices adyacentes tenga color distinto, y además cada vértice sea adyacente con al menos un vértice de cada color más pequeño que el suyo. Nuestro objetivo principal de esta tesis es encontrar el máximo número  $k$  de colores para el cual la gráfica de intersección de triángulos tiene una coloración de Grundy usando  $k$  colores. Es decir encontrar el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos. El problema lo dividimos en dos casos, encontrar el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos cuando el conjunto de puntos está en posición convexa y encontrar el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos cuando el conjunto de puntos está en posición general (no convexa). Puesto que determinar algorítmicamente el número de Grundy de una gráfica es un problema  $NP$ -difícil, en esta tesis damos cotas para este número para la gráfica de intersección de triángulos. Es decir damos una cota inferior y una cota superior para el número de Grundy cuando el conjunto de puntos está en posición convexa, una cota inferior y una cota superior cuando el conjunto de puntos está en posición general.

En específico para tamaños de conjuntos de puntos en posición convexa menores a siete, obtuvimos el valor del número de Grundy. Este resultado lo podemos ver en el teorema 4.3. Para tamaños de conjuntos de puntos en posición convexa mayores a seis, obtuvimos una cota inferior (ver teorema 4.4) y una cota superior (ver teorema 4.7) para el número de Grundy. Además, para este tipo de gráfica encontramos un conjunto de triángulos abiertos que se intersectan dos a dos y cuya intersección total es vacía, esto lo podemos ver en el teorema 4.6.

También dimos una cota inferior (ver teorema 4.8) y una cota superior (ver corolario 4.13) para el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos abiertos

determinados por conjuntos de puntos en posición general. Además dimos una cota inferior y una cota superior para el grado máximo para la gráfica de intersección de triángulos. Estos resultados los podemos ver en el teorema 4.10 y el teorema 4.12. Para la cota inferior del grado máximo para la gráfica de intersección de triángulos exhibimos un conjunto de puntos en posición general, el cual lo podemos ver en el teorema 4.11.

Con lo anterior concluimos que con el uso de técnicas combinatorias logramos obtener cotas casi cerradas para el número de Grundy de la gráfica de intersección de triángulos. La diferencia entre las cotas para el número de Grundy cuando el conjunto de puntos está en posición convexa es de  $\frac{23n^3}{216} = 0.106481n^3$ . La diferencia entre las cotas para el número de Grundy cuando el conjunto de puntos está en posición convexa es de  $\frac{7n^3}{54} = 0.129629n^3$ .

Además logramos obtener coloraciones Grundy de la gráfica de intersección de triángulos mediante el programa que diseñamos. Estas coloraciones, nos ayudan a observar algunas características, y el comportamiento de las clases cromáticas. Además estas coloraciones en ocasiones confirman nuestros resultados teóricos, y en ocasiones nos ayudaron a determinar nuestras cotas inferiores. También observamos que realizar una búsqueda exhaustiva para el número de Grundy no es apropiado, debido al número de orden exponencial de coloraciones que se deben realizar para obtenerlo. Sin embargo, generar un número determinado de coloraciones aleatorias nos ayudó a lograr nuestro objetivo.

Como trabajo a futuro proponemos mejorar la cota inferior y la cota superior para el número de Grundy para puntos en posición general. Esto porque la diferencia entre las cotas es grande. En específico mejorar la cota superior, ya que casi es el número total de triángulos. De igual forma, un problema interesante es estudiar el número de clan para este tipo de gráfica. Respecto a nuestro programa, podría mejorarse realizando búsquedas inteligentes para el número de Grundy.

Del conjunto de triángulos que se interseccionan dos a dos y cuya intersección de todos sea vacía que encontramos, evidentemente una tarea pendiente es encontrar un conjunto de tamaño más grande o demostrar que no existe. También podría extenderse este problema para cuando el conjunto de triángulos está determinado por puntos en posición general.

# Apéndice A

## Lista de resultados

En esta lista mostramos la aportación de nuestro trabajo de tesis. Es decir las cotas obtenidas para el número de Grundy de las gráficas de intersección de triángulos, denotadas por  $G_S(\mathcal{T})$ .

■ **Número de Grundy, para  $S$  en posición convexa.**

- Para  $3 \leq n \leq 6$ :

$$\Gamma(G_S(\mathcal{T})) = \omega(G_S(\mathcal{T})) = \frac{n^3}{24} + O(n^2).$$

- Cota inferior para  $n \geq 7$ :

$$\frac{n^3}{24} + O(n^2) = \omega(G_S(\mathcal{T})) = \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T})).$$

- Cota superior para  $n \geq 7$ :

$$\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})) = \frac{4n^3}{27} + O(n^2).$$

- Sea  $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$  el conjunto máximo de triángulos, tal que cualquier par de triángulos en  $\mathcal{T}^*$  se intersectan, pero la intersección de todos sea vacía.

$$\frac{n^2}{8} \leq |\mathcal{T}^*|.$$

■ **Número de Grundy, para  $S$  en posición general.**

- Cota inferior para  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ :

$$\frac{4n^3}{27} + O(n^2) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T}))$$

- Cota superior para  $\Delta(G_S(\mathcal{T}))$ :

$$\Delta(G_S(\mathcal{T})) \leq \frac{n^3}{6} + O(n^2)$$

- Cota inferior para  $G_S(\mathcal{T})$ :

$$\frac{n^3}{27} + O(n^2) \leq \omega(G_S(\mathcal{T})) \leq \chi(G_S(\mathcal{T})) \leq \Gamma(G_S(\mathcal{T}))$$

- Cota superior para  $G_S(\mathcal{T})$ :

$$\Gamma(G_S(\mathcal{T})) \leq \Delta(G_S(\mathcal{T})) \leq \frac{n^3}{6} + O(n^2)$$





# Bibliografía

- [1] S. Ahmed. Applications of graph coloring in modern computer science. *International Journal of Computer and Information Technology(IJCIT)*, 3(2):1–7, 2012.
- [2] O. Aichholzer, G. Araujo, N. García, T. Hackl, D. Lara, C. Rubio, and J. Urrutia. Geometric achromatic and pseudoachromatic indices. *Graphs and Combinatorics*, 32(2):431–451, 2015.
- [3] O. Aichholzer, F.Aurenhammer, and H.Krasser. Enumerating order types for small point sets with applications. *Order*, 19(3):265–281, 2002.
- [4] Gabriel Medina Alvarez. *Coloraciones completas en gráficas bipartitas geométricas*. Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2015.
- [5] G. Araujo, A. Dumitrescu, F. Hurtado, M. Noy, and J. Urrutia. On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Computational Geometry*, 32(1):59–69, 2005.
- [6] E. Boros and Z. Füredi. The number of triangles covering the center of an n-set. *Geometriae Dedicata*, 17(1):69–77, 1984.
- [7] B. Bukh. A point in many triangles. *Journal of Combinatorics*, 13(2):N10, 2006.
- [8] J. Cano, L. Barba, T. Sakai, and J.Urrutia. On edge-disjoint empty triangles of point sets. In *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, pages 83–100. 2013.
- [9] J. G. Ceder. Generalized sixpartite problems. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 9:28–32, 1964.
- [10] Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic graph theory*. CRC press, 2008.
- [11] R. Fabila and D. R. Wood. Colouring the triangles determined by a point set. *Journal of Computational Geometry*, 3(1):86–101, 2012.
- [12] S. Kim, A. Kostochka, and K. Nakprasit. On the chromatic number of intersection graphs of convex sets in the plane. *Electron. J. Combin*, 11(1):R52, 2014.

- [13] Constantino Matias Salvador. *Índice cromático para gráficas geométricas completas*. Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2015.