



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE COMPUTACIÓN

Creación de Portafolios de Inversión utilizando Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

Tesis que presenta

Salvador Fernando Castro Enciso

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Ingeniería Eléctrica

Opción Computación

Director de la Tesis: Dr. Carlos A. Coello Coello

México, D.F.

Julio de 2005

Abstract

Investment portfolios offer the possibility of obtaining higher yields than those obtained by investing in individual financial instruments. They consist of combinations of several financial instruments, also called values, which have their particular risks and benefits. The management of a portfolio consists of balancing the gains and losses, distributing and compensating the risk among the different financial instruments. This is a multicriteria optimization problem, that has been solved using different approaches. Some of these approaches are, however, difficult to use or offer a very small number of solutions.

This thesis presents a comparative study of three different approaches, based on multi-objective evolutionary algorithms, in order to generate multiple solutions (which are combinations) of the values of an investment portfolio. With each approach, we present an evaluation with real data taken from the Mexican stock market values. Additionally, this study presents an analysis of the type of encoding of the solutions that was found to be more suitable to tackle this problem. In order to make a quantitative validation of performance of the analyzed algorithms, we adopted performance measures reported in the specialized literature of evolutionary multi-objective optimization.

The algorithms that were analyzed obtained sets of solutions that maximize benefit and minimize risk. Such solutions offer to the investor a set of choices for choosing an investment portfolio. In the final part of this work, we analyze all the results obtained, and we identify an algorithm which consistently outperforms the others, based on the performance measures adopted.

Resumen

Los portafolios de inversión ofrecen la posibilidad de obtener mayores rendimientos a los logrados invirtiendo en instrumentos financieros de forma individual. Se componen de un conjunto de instrumentos financieros, también llamados valores, cada uno de los cuales tiene un riesgo y un beneficio. El manejo de un portafolio consiste en equilibrar las pérdidas y ganancias repartiendo y compensando el riesgo de los diferentes instrumentos financieros entre los mismos. Este es un problema de optimización multicriterio, que ha sido resuelto con diferentes enfoques que son difíciles de usar u ofrecen un número muy reducido de soluciones.

Esta tesis presenta un estudio comparativo de tres enfoques, basados en algoritmos evolutivos multiobjetivo, para generar múltiples soluciones (las cuales son mezclas) de los valores de un portafolio de inversión. Con cada enfoque, presentamos una evaluación que utiliza datos reales tomados del mercado de valores mexicano. Como parte de este estudio se tuvo que analizar el tipo de codificación de las soluciones que resultara más adecuada para lidiar con este problema. Para validar de manera cuantitativa el desempeño de los algoritmos analizados, se adoptaron métricas de desempeño reportadas en la literatura de optimización evolutiva multiobjetivo.

Los algoritmos analizados obtienen conjuntos de soluciones que maximizan el beneficio y minimizan el riesgo, ofreciendo al inversionista un conjunto de opciones para la elección de un portafolio de inversión. En la parte final del trabajo, se analizan todos los resultados obtenidos, y se identifica a un algoritmo que consistentemente logra obtener mejores resultados que los demás, con base a los valores de las métricas de desempeño utilizadas.

Agradecimientos

A mi mayor amor: Norma Leticia

... Pero tu sonrisa de ti habla
gritando con el alma, cantando con el corazón
pero en silencio brillas
y tu fulgor con la mirada persigo ...

A mis padres, por su ejemplo de tenacidad y vitalidad.

Al Dr. Carlos Artemio Coello Coello por su ayuda y dirección.

A la M. en Finanzas Norma Angélica González Trejo, por su entusiasta apoyo y orientación.

A los compañeros del grupo de trabajo EVOCINV, por su ayuda y asesoría en lo relativo al área de Computación Evolutiva.

Al Act. Rodolfo Gutiérrez Salas y al C.P. Enrique Quiróz Santana, por su ayuda en lo relativo al área de Finanzas.

A los profesores, personal y compañeros de la Sección de Computación del CINVESTAV, por su apoyo y amistad.

Al CINVESTAV por permitirnos tener acceso a una educación de alto nivel.

A la Universidad Panamericana por la gran calidad de la enseñanza compartida por ella.

A mis compañeros del Banco de México por su orientación y asesoría.

A mis familiares y amigos, gracias por su apoyo y comprensión.

Gracias a todos y cada uno de ustedes, y a Dios por permitirme llevar a la realidad un sueño.

Este trabajo de tesis fue derivado del proyecto NSF-CONACyT titulado “Artificial Immune Systems for Multiobjective Optimization” (Ref. 42435-Y), cuyo responsable es el Dr. Carlos A. Coello Coello.

Índice General

Índice General	VII
Índice de Tablas	XIII
Índice de Figuras	XXIII
Acrónimos	XXVII
Introducción	1
1 Computación Evolutiva	5
1.1 Antecedentes Históricos	5
1.1.1 El origen de las especies	6
1.1.2 El Neo-Darwinismo: la teoría sintética de la evolución	8
1.1.3 Fundamentos Biológicos	10
1.2 Heurísticas	11
1.3 Algoritmos evolutivos	11
1.4 Paradigmas	14
1.4.1 Las estrategias evolutivas (EE)	14
1.4.2 La programación evolutiva (PE)	15
1.4.3 Los algoritmos genéticos (AG)	16
1.5 Elementos de optimización	17

1.5.1 Optimización	17
1.5.2 Optimización multiobjetivo	18
1.6 Tratamiento de problemas multiobjetivo con técnicas evolutivas	21
1.6.1 NSGA-II	23
1.6.2 PAES	24
1.6.3 micro-AG para optimización multiobjetivo	24
2 Portafolios de inversión	27
2.1 Medición del rendimiento	28
2.2 Medición del riesgo: la desviación estándar	29
2.3 Riesgo y rendimiento	31
2.4 Portafolios de inversión de instrumentos financieros	32
2.5 Selección de instrumentos financieros para la creación de portafolios de inversión	35
2.5.1 La cartera óptima	39
2.5.2 Teoría Moderna de Portafolio	41
3 Revisión de literatura relacionada	43
3.1 Métodos basados en Pareto	43
3.2 Métodos no basados en Pareto	55
3.3 Comentarios	58
4 Metodología y desarrollo	63
4.1 El problema a resolver y su solución	63
4.1.1 Características del problema y la solución	63
4.1.2 Supuestos del MV	64

4.1.3	Requerimientos.....	65
4.1.4	Soluciones disponibles.....	66
4.1.5	Solución Evolutiva	67
4.1.6	Objetivo de la tesis	69
4.1.7	Método de trabajo	70
4.2	Información.....	70
4.3	Implementación de la solución evolutiva	76
4.3.1	Diseño del cromosoma.....	76
4.3.2	Análisis de la representación adoptada	77
4.3.3	Modelos simulados	81
4.3.4	Parámetros de los AEMO	82
4.3.5	Desarrollo de los AEMO.....	84
4.3.6	NSGA-II	84
4.3.7	Cambios efectuados al NSGA-II	84
4.3.8	PAES	84
4.3.9	Cambios efectuados al PAES.....	86
4.3.10	Micro-AG para optimización multiobjetivo	89
4.3.11	Cambios efectuados al micro-AG para optimización multiobjetivo	89
4.4	Métricas de comparación y análisis de Resultados.....	92
4.4.1	Aproximación al Frente de Pareto verdadero	92
4.4.2	Comparación cuantitativa del desempeño de los AEMO	94
4.4.3	Plan de pruebas y su desarrollo	96
4.4.4	Comentarios acerca de los tiempos de ejecución.....	97
4.4.5	Análisis de los tiempos de ejecución.....	97

4.4.6	Comentarios acerca de la Métrica de conteo exitoso (<i>SC: Success Counting</i>) y la Métrica de conteo exitoso invertido (<i>ISC: Inverted Success Counting</i>)	99
4.4.7	Análisis de los resultados acerca de la Métrica de conteo exitoso (<i>SC: Success Counting</i>) y la Métrica de conteo exitoso invertido (<i>ISC: Inverted Success Counting</i>)	106
4.4.8	Comentarios acerca de la Métrica de distancia generacional invertida (<i>IGD: Inverted Generational Distance</i>)	107
4.4.9	Análisis de los resultados acerca de la Métrica de distancia generacional invertida (<i>IGD: Inverted Generational Distance</i>)	113
4.4.10	Comentarios acerca de la Métrica de cobertura de dos conjuntos (<i>TSC: Two Set Coverage</i>).....	114
4.4.11	Análisis de los resultados acerca de la Métrica de cobertura de dos conjuntos (<i>TSC: Two Set Coverage</i>)	121
4.4.12	Comentarios acerca de la Métrica del espacio distribuido de Schott (<i>SS: Spread Schott</i>).....	122
4.4.13	Análisis de los resultados acerca de la Métrica del espacio distribuido de Schott (<i>SS: Spread Schott</i>)	128
4.4.14	Comentarios acerca de la Métrica de contribución al frente (<i>PaCo: Pareto contribution</i>)	129
4.4.15	Análisis de los resultados acerca de la Métrica de contribución al frente (<i>PaCo: Pareto contribution</i>)	130
4.4.16	Resumen del Análisis de los resultados obtenidos	132
4.4.17	Consideración financiera de la solución propuesta	140
5	Conclusiones y trabajo futuro	151
	Bibliografía	155
A	Apéndice Financiero	163
A.1	El Mercado de Valores en México	163

A.1.1	Mercado de Capitales	163
A.1.2	Mercado de Deuda	164
A.1.3	Otra modalidad: el Mercado de Divisas	164
A.2	Participantes del Mercado de Valores	164
A.2.1	Entidades Emisoras (emisor)	164
A.2.2	Intermediarios bursátiles	165
A.2.3	Inversionistas	165
A.2.4	Autoridades y Organismos Autoregulatorios.....	165
A.3	Elementos básicos de una inversión.	166
A.3.1	Rendimiento.....	166
A.3.2	Riesgo.	166
A.3.3	Plazo.....	166
A.3.4	Liquidez.....	166
A.3.5	Diversificación.....	167
A.4	Correlación.....	167
A.5	División del riesgo	168
A.6	Riesgos y rentabilidad en el mercado	168
A.7	Instrumentos Financieros.....	169
B	Glosario	171
C	Detalle del cálculo de métricas	175

Índice de Tablas

3.1	Parámetros y características utilizadas por Vedarajan <i>et al.</i> [65]	60
3.2	Parámetros y características utilizadas por Pérez <i>et al.</i> [49]	60
3.3	Parámetros y características utilizadas por Lin <i>et al.</i> [36]	61
3.4	Parámetros y características utilizadas por Mukerjee <i>et al.</i> [42]	61
3.5	Parámetros y características utilizadas por Streichert <i>et al.</i> [60] [59] [61]	62
3.6	Parámetros y características utilizadas por Fieldsend <i>et al.</i> [23] [22]	62
4.7	Emisoras con Bursatilidad Alta al 3 de febrero del 2004.	71
4.8	Emisoras con Bursatilidad Baja al 3 de febrero del 2004.	71
4.9	Ejemplo de la Información de acciones del Mercado de Capitales de la BMV:	72
4.10	Escenarios de trabajo creados a partir de la información de la BMV.	72
4.11	Ejemplo de la base de datos homogénea creada a partir de la información de BMV99-04.	74
4.12	Ejemplo de la matriz de Varianza-Covarianza con información de BMV99-04.	75
4.13	Ejemplo de normalización de los valores representados a partir de la representación de 6 bits.	81
4.14	Parámetros para ejecución de los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivos adoptados en este estudio comparativo.	83
4.15	Pseudo-código del NSGA-II	85

4.16	Pseudo-código de fast-non-dominated-sort (P)	85
4.17	Pseudo-código de crowding-distance-assignment (I)	86
4.18	Pseudo-código de (1+1)-PAES	87
4.19	Pseudo-código de prueba ($c, m, \text{archivo}$)	87
4.20	Modificación propuesta al código de PAES.	88
4.21	Pseudo-código del Micro-AG.	90
4.22	Pseudo-código del Controlador-Archivado.	91
4.23	Pseudo-código de Malla-Adaptativa.	91
4.24	Parámetros para ejecución del programa <i>Solver</i>	93
4.25	Proporción de los tiempos con respecto al KP_ NSGA2.	98
4.26	Proporción de los tiempos con respecto al KP_ NSGA2.	98
4.27	Tiempos promedio.	99
4.28	Tiempos promedio.	99
4.29	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_ F02.	100
4.30	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_ F02_ CC4.	100
4.31	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_ F02_ CC8.	101
4.32	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_ F02_ CC12.	102
4.33	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_ F02_ CC26.	103
4.34	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_ F03.	103

4.35	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03_CC4.	104
4.36	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03_CC8.	105
4.37	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03_CC12.	105
4.38	Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03_CC26.	106
4.39	Medición del desempeño con IGD. MV_F02.	108
4.40	Medición del desempeño con IGD. MV_F02_CC4.	108
4.41	Medición del desempeño con IGD. MV_F02_CC8.	109
4.42	Medición del desempeño con IGD. MV_F02_CC12.	109
4.43	Medición del desempeño con IGD. MV_F02_CC26.	110
4.44	Medición del desempeño con IGD. MV_F03.	110
4.45	Medición del desempeño con IGD. MV_F03_CC4.	111
4.46	Medición del desempeño con IGD. MV_F03_CC8.	112
4.47	Medición del desempeño con IGD. MV_F03_CC12.	112
4.48	Medición del desempeño con IGD. MV_F03_CC26.	112
4.49	Medición del desempeño con TSC. MV_F02.	115
4.50	Medición del desempeño con TSC. MV_F02_CC4.	115
4.51	Medición del desempeño con TSC. MV_F02_CC8.	116
4.52	Medición del desempeño con TSC. MV_F02_CC12.	117
4.53	Medición del desempeño con TSC. MV_F02_CC26.	118

4.54	Medición del desempeño con TSC. MV_ F03.	118
4.55	Medición del desempeño con TSC. MV_ F03_ CC4.	119
4.56	Medición del desempeño con TSC. MV_ F03_ CC8.	119
4.57	Medición del desempeño con TSC. MV_ F03_ CC12.	120
4.58	Medición del desempeño con TSC. MV_ F03_ CC26.	121
4.59	Medición del desempeño con SS. MV_ F02.	123
4.60	Medición del desempeño con SS. MV_ F02_ CC4.	123
4.61	Medición del desempeño con SS. MV_ F02_ CC8.	123
4.62	Medición del desempeño con SS. MV_ F02_ CC12.	124
4.63	Medición del desempeño con SS. MV_ F02_ CC26.	125
4.64	Medición del desempeño con SS. MV_ F03.	125
4.65	Medición del desempeño con SS. MV_ F03_ CC4.	126
4.66	Medición del desempeño con SS. MV_ F03_ CC8.	126
4.67	Medición del desempeño con SS. MV_ F03_ CC12.	127
4.68	Medición del desempeño con SS. MV_ F03_ CC26.	127
4.69	Medición del desempeño con PaCo. Todos los modelos.	130
4.70	AEMO de mejor desempeño según las métricas de desempeño.	132
4.71	Valores métricas. MV_ F02_ CC8. BMV2002.	133
4.72	Valores métricas. MV_ F03. BMV2001.	136

4.73	Diferentes estructuras de carteras de inversión obtenidas utilizando KP_ NSGA2 con BMV99-04 para el modelo MV_ F02.	141
4.74	Compra de instrumentos financieros y variación en precio del portafolio.	148
C.75	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F02.	175
C.76	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F02_ CC4.	176
C.77	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F02_ CC8.	176
C.78	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F02_ CC12.	177
C.79	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F02_ CC26.	177
C.80	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F03.	178
C.81	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F03_ CC4.	178
C.82	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F03_ CC8.	179
C.83	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F03_ CC12.	179
C.84	Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_ F03_ CC26.	180
C.85	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_ F02.	181
C.86	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_ F02_ CC4.	182
C.87	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_ F02_ CC8.	183

C.88	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F02_CC12.	184
C.89	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F02_CC26.	185
C.90	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03.	186
C.91	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03_CC4.	187
C.92	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03_CC8.	188
C.93	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03_CC12.	189
C.94	Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03_CC26.	190
C.95	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02.	191
C.96	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02_CC4.	192
C.97	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02_CC8.	193
C.98	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02_CC12.	194

C.99	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02_CC26.	195
C.100	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03.	196
C.101	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03_CC4.	197
C.102	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03_CC8.	198
C.103	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03_CC12.	199
C.104	Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03_CC26.	200
C.105	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02.	201
C.106	Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02.	202
C.107	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02_CC4.	203
C.108	Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02_CC4.	204
C.109	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02_CC8.	205
C.110	Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02_CC8.	206
C.111	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02_CC12.	207

C.112	Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02_CC12.	208
C.113	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02_CC26.	209
C.114	Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02_CC26.	210
C.115	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03.	211
C.116	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03_CC4.	212
C.117	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03_CC8.	213
C.118	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03_CC12.	214
C.119	Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03_CC26.	215
C.120	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02.	216
C.121	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02_CC4.	217
C.122	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02_CC8.	218
C.123	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02_CC12.	219
C.124	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02_CC26.	220

C.125	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03.	221
C.126	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03_CC4.	222
C.127	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03_CC8.	223
C.128	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03_CC12.	224
C.129	Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03_CC26.	225
C.130	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02.	225
C.131	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02.	226
C.132	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC4.	226
C.133	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC4.	226
C.134	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC8.	227
C.135	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC8.	227
C.136	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC12.	227
C.137	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC12.	228

C.138	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC26.	228
C.139	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC26.	229
C.140	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03.	229
C.141	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03.	229
C.142	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC4.	230
C.143	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC4.	230
C.144	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC8.	230
C.145	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC8.	231
C.146	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC12.	231
C.147	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC12.	231
C.148	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC26.	232
C.149	Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC26.	232

Índice de Figuras

1.1	Charles Robert Darwin.	6
1.2	Friedrich Leopold August Weismann.	7
1.3	Gregor Johann Mendel.	8
1.4	Individuo formado por un cromosoma en representación binaria.	13
1.5	Genotipo y Fenotipo.	14
1.6	Frente de Pareto para un problema en que se quieren minimizar dos funciones objetivo.	21
2.7	Evidencia empírica de crecimiento entre el riesgo y el rendimiento esperado. Elaboración propia con datos de la BMV.	31
2.8	Efecto de la diversificación.	33
2.9	Harry M. Markowitz.	36
2.10	Cartera eficiente, donde se maximiza el Rendimiento y se minimiza el Riesgo.	39
2.11	Curvas de indiferencia y frontera eficiente.	40
2.12	Proceso de inversión MPT.	41
4.13	$\rho = 0,8695263$ Elaboración propia con datos de la BMV.	75
4.14	$\rho = 0,00232379$ Elaboración propia con datos de la BMV.	76
4.15	Codificación propuesta del cromosoma para el problema del MV.	80
4.16	Combinaciones AEMO-modelo-escenario-métricas.	97

4.17	AFPV para el espacio de trabajo BMV2002.	133
4.18	FPG creado por KP_ NSGA2 con BMV2002. MV_ F02_ CC8.	134
4.19	FPG creado por KP_ PAES con BMV2002. MV_ F02_ CC8.	134
4.20	FPG creado por KP_ mAG con BMV2002. MV_ F02_ CC8 simulación 14.	135
4.21	FPG creado por KP_ mAG con BMV2002. MV_ F02_ CC8 simulación 8.	135
4.22	AFPV para el espacio de trabajo BMV2001.	137
4.23	FPG creado por KP_ NSGA2 con BMV2001 para el modelo MV_ F03.	137
4.24	FPG creado por KP_ PAES con BMV2001 para el modelo MV_ F03.	138
4.25	FPG creado por KP_ mAG con BMV2001 para el modelo MV_ F03.	138
4.26	FPG creado por KP_ NSGA2 con BMV99-04 para el modelo MV_ F03.	142
4.27	FPG creado por KP_ NSGA2 con BMV99-04 para el modelo MV_ F03.	143
4.28	Comparación de la AFPV con la Frontera Eficiente del μ y σ	143
4.29	AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango [0.0:0.2).	144
4.30	AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango [0.2:0.4).	145
4.31	AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango [0.4:0.6).	145

4.32	AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango $[0.6:0.8)$	146
4.33	AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango $[0.8:1.0]$	146
4.34	Variación de precios del portafolio. MV_ F03_ CC26.	149
4.35	Variación del rendimiento real del portafolio MV_ F03_ CC26.	149
A.36	Coeficiente de correlación y relación entre instrumentos: ρ_{ij}	167

Acrónimos

- AE** Algoritmo(s) Evolutivo(s).
- AEMO** Algoritmo(s) Evolutivo(s) MultiObjetivo.
- AFPV** Aproximación al Frente de Pareto verdadero
- AG** Algoritmo(s) Genético(s).
- BMV** Bolsa Mexicana de Valores.
- CAPM** *Capital Asset Pricing Model*: Modelo de Valuación de los Activos de Capital.
- EE** Estrategia(s) Evolutiva(s).
- EMOO** *Evolutionary Multi-Objective Optimization*: Optimización Evolutiva Multi-Objetivo.
- FPC** Frente de Pareto conjunto.
- FPG** Frente de Pareto generado.
- FPV** Frente de Pareto verdadero.
- MCDM** *Multicriteria Decision Making*: Modelo para la toma de Decisiones Multi-criterio.
- MO** Multiobjetivo.
- MV** Modelo de Análisis Media-Varianza (Riesgo-Beneficio) de Markowitz (para la selección y optimización de portafolios).
- NN** *Neural Network(s)*: Red(es) Neuronal(es).
- PaCo** *Pareto Contribution*: Métrica de contribución al frente de Pareto.
- PrC** Programación Cuadrática.
- PE** Programación Evolutiva.
- PrM** Programación Matemática.
- POM** Problema(s) de Optimización Multiobjetivo.

Introducción

Los portafolios de inversión ofrecen la posibilidad de obtener mayores rendimientos a los logrados invirtiendo en instrumentos financieros de forma individual. Se componen de una mezcla de un conjunto de instrumentos financieros, también llamados valores¹, cada uno de los cuales tiene asociado un riesgo y un beneficio. La teoría de selección de instrumentos financieros para la creación de portafolios de inversión desarrolla la idea de la diversificación de los instrumentos financieros² [38] partiendo del hecho de que si se mezclan diferentes riesgos y beneficios se obtiene en suma un equilibrio de las pérdidas y ganancias, lo que sería difícil de obtener si solamente se invirtiera en unos cuantos instrumentos financieros³. Esto combina a los distintos instrumentos financieros en una abundante variedad de formas posibles, obteniéndose por ello diferentes portafolios posibles. El problema establece varios objetivos a la vez, buscando obtener el máximo beneficio posible de acuerdo con la aversión, indiferencia o atracción al riesgo por parte del inversionista [49].

Este es un problema de optimización multiobjetivo que ha sido planteado con el modelo de Análisis de Media-Varianza (Riesgo-Beneficio) creado por Markowitz (MV) [38] [39]. Este problema ha sido resuelto utilizando diferentes enfoques que usualmente parten de un punto inicial de búsqueda (establecido por el usuario) que debe estar cerca a la solución final a la que el algoritmo llegará, y los resultados obtienen un número limitado de soluciones. Esto implica un trabajo laborioso, lo que dificulta la aplicabilidad del algoritmo.

Las técnicas de optimización evolutiva multiobjetivo (EMOO, por sus siglas en inglés) son una alternativa de solución al problema planteado. En esta tesis las propuestas de mezclas de instrumentos financieros que forman los portafolios de inversión, se obtienen utilizando algunos de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMO) representativos del

¹ Valor desde el punto de vista financiero es una forma genérica de nombrar a los instrumentos financieros de inversión, como las acciones, bonos, activos financieros, títulos, etc. como una traducción cercana a los términos utilizados en inglés para *Assets*, *Stocks*, *Bonds* y *Securities*.

Con el fin de evitar confusiones, el tecnicismo financiero llamado *valor* será referido dentro de este documento como *instrumento financiero*.

² Diluyendo con ello las bajas coyunturales del mercado o de los propios valores.

³ La diversificación se realiza mediante la adquisición de instrumentos con diferentes rendimientos, riesgos, plazos y liquidez, los cuales operan en los diversos mercados financieros entre diferentes emisoras de sectores distintos, en divisas, en bienes raíces, en metales, en inversiones financieras, etc.

estado del arte en el área: NSGA-II [16], PAES [33] y micro-AG para optimización multiobjetivo [8] [4] [62]. En los experimentos presentados, se utilizan datos reales de instrumentos financieros del mercado de valores mexicano⁴ y con la finalidad de establecer bases de comparación se utilizan métricas estándar para medir el desempeño de los AEMO implementados.

Con el uso de los AEMO se obtiene eficientemente un conjunto de soluciones a lo largo del frente de Pareto que maximizan el beneficio y minimizan el riesgo. Además, permiten considerar otras funciones objetivo, como por ejemplo la función para el cálculo de los costos de transacción; esto con el propósito de que el inversionista esté en la posibilidad de decidir cuál portafolio cumple con sus propias expectativas de riesgo-beneficio.

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se presenta una introducción a la computación evolutiva a través de sus orígenes y se proporcionan algunos conceptos básicos, así como los principales paradigmas evolutivos multiobjetivo desarrollados hasta el momento.

En el capítulo 2 se presentan los conceptos básicos del problema general de optimización y de la optimización multiobjetivo, estableciendo las principales definiciones que le son inherentes.

En el capítulo 3 se describen los principales conceptos financieros requeridos para entender el problema de los portafolios de inversión, se describe el comportamiento conjunto del riesgo y rendimiento, y se detalla su medición. Se plantea también el modelo de media-varianza de Markowitz (MV).

En el capítulo 4 se hace una breve reseña del trabajo previo relacionado. Al final se resumen las principales características de los AEMO utilizados hasta la fecha para resolver el problema específico del modelo MV.

En el capítulo 5 se describe la metodología desarrollada para realizar esta tesis. Se define el problema y la solución evolutiva implementada, se describe la implementación realizada y los resultados obtenidos, se aplican métricas de comparación, y se presentan las conclusiones finales de la investigación.

Al final del documento se presenta la bibliografía consultada, se provee de un Apéndice con información del entorno financiero de los portafolios de inversión, un Glosario de la terminología financiera utilizada en este documento, y un Apéndice con los cuadros que

⁴ Para una mayor explicación acerca de los conceptos en finanzas utilizados en esta tesis, consultar el Apéndice Financiero al final de este documento.

detallan la aplicación de las métricas de medición del desempeño de los AEMO utilizados en este estudio.

Capítulo 1

Computación Evolutiva

1.1 Antecedentes Históricos

A finales del siglo XVIII y principios del XIX la ciencia había acumulando suficiente evidencia que explicaba el tipo de conexión que las especies guardaban entre sí, por lo cual se hizo innegable que las especies no siempre habían subsistido de la misma forma y con idénticas características. Se sabía que ciertas especies que habían existido en el pasado ahora estaban extintas; también se planteó la posibilidad de que otras especies que existen en el presente antes no existían. Inclusive se llegó a suponer que determinadas especies del presente estaban de alguna forma relacionadas con otras especies que habían existido en el pasado.

Algunos de los investigadores de esa época que aseveraron que *las formas de vida cambiaban con el tiempo* fueron: George Louis Leclerc, Conde Buffon (1707-1788); Erasmus Darwin (1731-1802); Jean Baptiste, chevalier de Lamarck (1744-1829) y George Cuvier (1769-1832).

Las dos teorías biológicas más importantes de este periodo fueron: el *Lamarckismo* y el *Catastrofismo* (propuesta por George Cuvier); a pesar de ello, con las investigaciones de personajes como Louis Pasteur y August Weismann con el tiempo se evidenció que estas dos teorías eran erróneas.

El salto conceptual más importante en la vida de Charles Darwin (1809-1882) fue comprender que toda población consiste de individuos ligeramente distintos unos de otros, lo que supone aceptar que las especies cambian con el tiempo y que proceden unas de otras. Las variaciones que existen entre los individuos hacen que cada uno tenga distintas capacidades para adaptarse al medio natural, reproducirse exitosamente y transmitir sus rasgos a su descendencia. Al paso de las generaciones, los rasgos de los individuos que mejor se adaptaron a las condiciones naturales se vuelven más comunes y la población evoluciona (*descendencia con modificación*). Y especialmente, Darwin encontró una explicación verosímil de la causa de este cambio con su teoría de que el medio ambiente

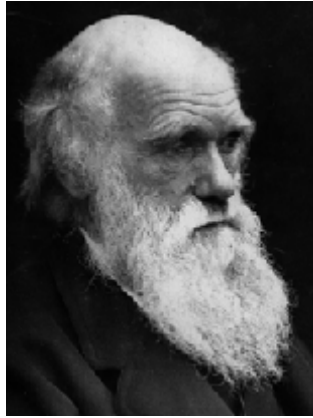


Fig. 1.1. Charles Robert Darwin.

selecciona estadísticamente como reproductores a los individuos de cada especie que son más aptos para vivir en él [29].

El pensamiento de Darwin estuvo influenciado por las ideas de Thomas Malthus (1766-1834), que escribió que la población humana tendía a crecer exponencialmente y con ello a acabarse los recursos alimenticios disponibles. Esto provoca un estado de crisis que lleva a los individuos a competir entre ellos por la supervivencia. Darwin creía que las variaciones en los rasgos hereditarios de los individuos los hacía más o menos capaces de enfrentarse a la competencia por los recursos.

1.1.1 El origen de las especies

La teoría de la evolución que postuló Darwin tuvo un enorme impacto en el pensamiento europeo de la segunda mitad del siglo XIX. Los principales argumentos de *EL ORIGEN DE LAS ESPECIES POR LA SELECCIÓN NATURAL*, que se publicó en 1859 son:

1. Los tipos biológicos o especies no tienen una existencia fija ni estática sino que se encuentran en cambio constante.
2. La vida se manifiesta como una lucha constante por la existencia y la supervivencia.
3. La lucha por la supervivencia provoca que los organismos que menos se adaptan a un medio natural específico desaparezcan y permite que los mejores adaptados se reproduzcan. A este proceso se le llama *selección natural*.

4. La selección natural, el desarrollo y la evolución requieren de un enorme período de tiempo, tan largo que en una vida humana no se pueden apreciar estos fenómenos.

5. Las variaciones genéticas que producen el incremento de probabilidades de supervivencia son azarosas y no son provocadas ni por Dios (como pensaban los religiosos) ni por la tendencia de los organismos a buscar la perfección (como proponía Lamarck) [13] [46] [35].

Según sus propias palabras, la selección natural conduce una gran extinción de las formas orgánicas intermedias y menos perfeccionadas, y lleva igualmente a la divergencia de caracteres; por consiguiente, durante la modificación de los descendientes de cualquier especie y durante la incesante lucha de todas las especies por incrementar su número, cuanto más diversos lleguen a ser los descendientes, mayores serán sus probabilidades de triunfo en la lucha por la vida [12].



Fig. 1.2. Friedrich Leopold August Weismann.

Friedrich Leopold August Weismann (1834-1914), enunció la teoría del *germoplasma*, afirmando que sólo se heredan variaciones del germen plasmático, pero no los caracteres adquiridos. Distingue las células germinantes o reproductoras (conocidas como genotipo) cuyo plasma es inmortal en potencia, por lo que transmiten información hereditaria, y las células somáticas o del cuerpo (conocidas como fenotipo) que no lo hacen. La conclusión de la teoría de Weismann fue que la selección natural es el único mecanismo capaz de cambiar la línea germinal, en tanto que esa línea germinal como el ambiente pueden influir al soma.



Fig. 1.3. Gregor Johann Mendel.

Este nuevo sentido que adquiere la biología contrasta con el trabajo de Gregor Mendel (1822-1884) que descubrió sus famosas leyes de la distribución estadística de caracteres hereditarios, como resultado de la cruce de plantas durante sucesivas generaciones de individuos que portaban inicialmente en estado puro dichos caracteres (genes y cromosomas), explicando con ello la variabilidad de los individuos. Concluyó que no existen mezclas de genes como se creía hasta entonces, sino que sólo se combinan en la reproducción conservando su individualidad a través de las generaciones.

El trabajo de Mendel dio origen a dos importantes ramas de la investigación biológica del siglo XX, la de la genética y la bioquímica [29].

1.1.2 El Neo-Darwinismo: la teoría sintética de la evolución

La teoría evolutiva propuesta originalmente por Charles Darwin en combinación con el seleccionismo de August Weismann y la genética de Gregor Mendel, se conoce como el paradigma Neo-Darwiniano.

El neo-darwinismo establece que la historia de la vasta mayoría de la vida en nuestro planeta puede ser explicada a través de unos cuantos procesos estadísticos que actúan en y dentro de las poblaciones y especies: la reproducción, la mutación, la competencia y la selección.

El neo-darwinismo se basa en cinco premisas:

1. La estabilidad del proceso de reproducción: los organismos engendran organismos similares.
2. El número de individuos que sobrevive en cada generación, y en cada especie, es siempre menor que el número producido inicialmente: nacen más individuos que los que podrán sobrevivir.
3. En cualquier población ocurren variaciones aleatorias independientes del ambiente, algunas de las cuales serán hereditarias.
4. Las interacciones entre las variaciones al azar y el ambiente, determinan quiénes sobrevivirán y quiénes no. Las variaciones que permiten sobrevivir y reproducirse, se llaman favorables. Esta es la esencia de la selección natural.
5. Tras suficiente tiempo, la selección lleva a la acumulación de cambios que explica la diversidad de los organismos.

La materia prima del cambio son las mutaciones aleatorias (término que significa ausencia de relación con su futura adaptabilidad al ambiente), pero ellas por sí mismas no explican la evolución, la que se tornaría sumamente lenta, habida cuenta que la mayor parte de las mismas tendrían efectos contraproducentes para la supervivencia. Las recombinaciones del material genético entre individuos de la misma especie, lleva a que se expongan diferentes combinaciones del acervo informativo, a la presión de la selección. Los procesos que ocurren al nivel genético, explican la variabilidad de los seres vivos. La variabilidad, es finalmente preservada por la existencia de la reproducción sexual [1].

El origen de las especies por la selección natural y la genética, circunscritos como el *proceso de la evolución natural*, han mostrado su capacidad para explicar la evolución de organismos en poblaciones que generación a generación, optimizan su capacidad de supervivencia en medios ambientes variados y complejos. Tomando como punto de partida esta capacidad de búsqueda de organismos óptimos, el proceso evolutivo es replicado para resolver problemas en un sentido más general.

1.1.3 Fundamentos Biológicos

Cada ser vivo que habita nuestro planeta posee características que lo identifican y lo diferencian de otros individuos. Las características externas establecen el **fenotipo** del individuo, el que está determinado por las proteínas que produce, y esto a su vez está definido en la información genética de cada una de sus células.

Todos los seres vivos están compuestos de células formadas por **cromosomas**, que son los responsables de la transmisión genética. Un cromosoma es una larga molécula de **ADN** (ácido desoxirribonucleico), constituida por cuatro distintos compuestos más simples llamados nucleótidos. Cada subcadena de tres nucleótidos codifica un aminoácido diferente, los que al unirse forman una proteína; al conjunto de nucleótidos que codifican una proteína completa se le llama **gene**. El gene codifica una función específica y sólo puede ocupar un cierto lugar dentro del cromosoma. El valor que posee un gene determinado se le llama **alelo**.

El conjunto de todos los cromosomas, es decir, toda la información genética de un individuo se llama genoma y el conjunto de genes contenidos en el genoma **genotipo**, siendo éste el que determina, en buena medida, el fenotipo del individuo.

La reproducción sexual consiste de manera general en la recombinación o **cruza** de los genes de uno (asexual) o dos (sexual) padres para dar lugar al genoma de un nuevo individuo. Durante este proceso pueden ocurrir errores de copiado (alteración de la molécula de ADN original) lo que constituye una **mutación**, que puede manifestarse en el fenotipo y hacer al nuevo individuo diferente del resto de sus congéneres.

El **individuo** es el elemento básico de una población, de forma tal que una **población** es un conjunto de individuos capaces de relacionarse e interactuar juntos. Un individuo se desarrolla dentro de un cierto ambiente y este último a su vez actúa sobre el individuo, alterando su capacidad de adaptación y por ende de sobrevivencia al medio, que se conoce como **aptitud**. Con base en la aptitud de cada individuo, el proceso de **selección** determinará cuales son los individuos que se reproducirán para dar lugar a nuevas generaciones.

La **epístasis** implica una relación entre genes de diferentes posiciones dentro de una misma representación, por lo que al aplicarse una modificación a alguno de ellos, esto impacta a los que están relacionados con éste.

Un **nicho** ecológico está constituido por organismos de la misma especie, es decir, individuos similares que se reproducen entre sí y que comparten la misma estrategia de supervivencia. Especies que ocupan nichos diferentes pueden coexistir de forma estable,

pero especies conviviendo en el mismo nicho, compiten hasta que la más débil es extinguida [57].

1.2 Heurísticas

Son técnicas que buscan obtener soluciones aproximadas a problemas para los cuales no existen métodos eficientes de solución, o para los cuales los métodos existentes requieren un tiempo prohibitivamente grande. Una heurística buscará mediante una estrategia ordenada localizar diferentes instancias de soluciones que se vayan acercando al óptimo, aunque esto no garantiza lograr obtener la mejor solución posible. Se sobrentiende que realizar una búsqueda exhaustiva no es posible o lo es en un tiempo no factible, y se acepta que encontrar una solución aproximada en un tiempo finito es algo aceptable y posible.

Los métodos heurísticos de búsqueda inspirados en el proceso de la evolución natural se proponen entonces como una alternativa a aquellos problemas donde existe dificultad para utilizar los procedimientos matemáticos tradicionales. Una ventaja de las soluciones computacionales, y en especial de la computación evolutiva, consiste en la flexibilidad de implementación a la solución de diversos problemas, sin requerir de modificaciones sustanciales al modelo general; su ventaja consiste en que requiere de un conocimiento mínimo de información acerca del problema a resolver, en contraposición a la necesidad de los métodos tradicionales, de un modelo matemático constituido por una función claramente definida y de la observancia de ciertas características para su uso.

Por ello la computación evolutiva es un punto de atención para diversos investigadores, como por ejemplo para quienes hacen uso de métodos de optimización para la búsqueda de soluciones a problemas con uno o varios objetivos. Esto se confirma revisando el constante crecimiento de las publicaciones relativas a este tema y sus aplicaciones.

1.3 Algoritmos evolutivos

La Computación Evolutiva es un paradigma sub-simbólico de la Inteligencia Artificial cuyos principios se basan en la teoría Neo-Darwiniana de la evolución, la cual se sustenta en el principio de supervivencia del más apto que existe en la Naturaleza.

Originada desde 1930, con el trabajo pionero de W. D. Cannon, la computación evolutiva ha dado pie a tres técnicas principales que fueron concebidas de manera totalmente independiente:

- La programación evolutiva (PE).
- Las estrategias evolutivas (EE).
- Los algoritmos genéticos (AG).

Cada una de ellas se desarrolló con diferentes motivaciones, aunque hoy en día suelen aplicarse en general a problemas de optimización (numérica y combinatoria) y de aprendizaje.

Los algoritmos evolutivos (AE) toman el modelo neo-darwinista y lo implementan en forma de un ciclo computacional. Un AE está caracterizado por:

1. *Representación*. Estructura de datos que codifica los parámetros (genes) de una posible solución a un problema.
2. *Población*. Conjunto de individuos que representan las variables de decisión de las funciones objetivo del problema. Utilizan la representación como forma de simular cadenas cromosómicas (individuos) con una carga de información genética.
3. *Operadores genéticos*. Son manipuladores o modificadores de la información genética de los individuos. Promueven la diversificación de individuos dentro de una población, lo que se traduce en el ámbito externo como puntos correspondientes a otras regiones y puntos cercanos a regiones prometedoras del espacio de búsqueda, básicamente son:
 - a) *Mutación*. Variación de uno o más alelos del gen. Su aplicación en forma aleatoria a diferentes puntos de la cadena cromosómica produce individuos con pequeñas variaciones con respecto al individuo original.
 - b) *Recombinación o cruza*. Es la cruza de las cadenas cromosómicas de los individuos padre que generan nuevos individuos. Su aplicación en forma selectiva sobre individuos padre permite que prevalezcan características de un padre en su descendencia, pero mezcladas con las características de otros *buenos* padres.

- c) *Selección*. Se basa en el valor que determinan dichos individuos de su *función de aptitud*, la cual es consecuencia directa de la influencia del individuo en las funciones objetivo del problema, y sirve para determinar su supervivencia en la siguiente generación.
4. *Parámetros*. Valores que se proveen para simular el proceso evolutivo: tamaño de la población, probabilidad de aplicar un operador genético, etc.

Cada cromosoma corresponde a un individuo de la población. Los cromosomas usualmente son representados por cadenas binarias. Dado que un gene es una subsección de un cromosoma, codificará el valor de una sola variable. Ver figura 1.4.

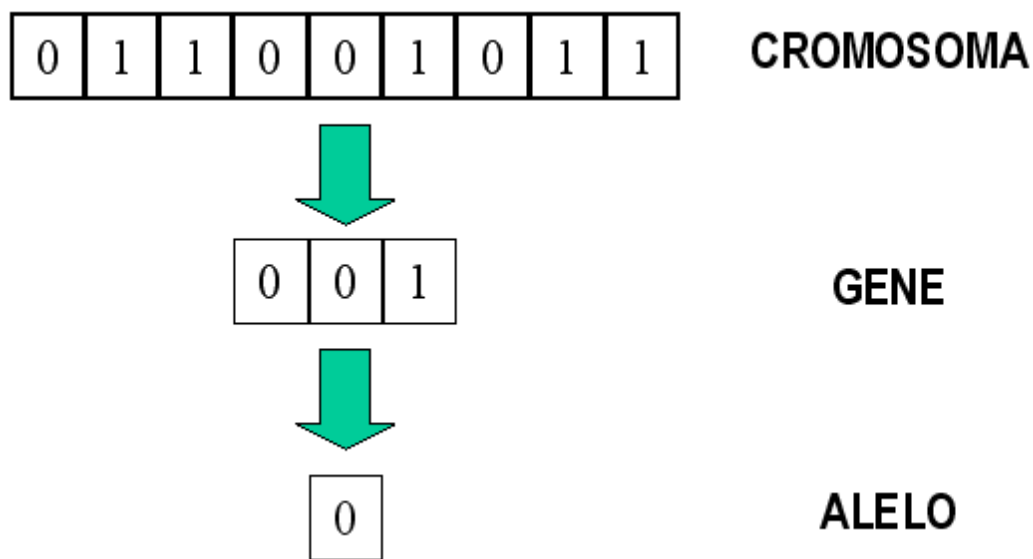


Fig. 1.4. Individuo formado por un cromosoma en representación binaria.

Así pues, el genotipo corresponde con la codificación (p. ej., binaria) del cromosoma y el fenotipo con la decodificación de éste. Ver figura 1.5.

Acorde a la selección natural de los más aptos, en los AE existe un mecanismo que permite que los individuos con mejor aptitud se conserven durante el proceso evolutivo sin recombinarse ni mutarse. A este se le conoce como **elitismo**. En general, este mecanismo se fundamenta en retener en la generación i de un AE, a los k mejores individuos

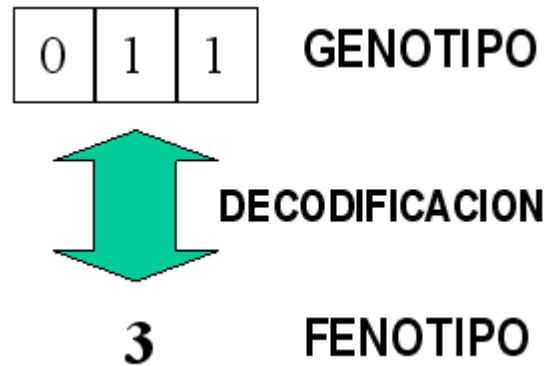


Fig. 1.5. Genotipo y Fenotipo.

de las últimas r generaciones. En su versión más simple consiste en retener (copiar sin ninguna alteración) al mejor individuo de la generación inmediata anterior, lo que asegura que el mejor individuo de la generación $i + 1$ tendrá una calificación de aptitud (*fitness*) al menos tan alta como el mejor de la generación i , evitando con ello que la mejor solución encontrada hasta el momento sea perdida a causa del proceso evolutivo. Esto asegura el comportamiento monotónico de la mejor aptitud por generación, lo que es condición necesaria y suficiente para la convergencia del AE [34].

La evolución es, por lo tanto, el resultado de estos procesos estocásticos fundamentales que interactúan entre sí en las poblaciones, generación tras generación.

1.4 Paradigmas

Tres son los paradigmas principales de la computación evolutiva:

1.4.1 Las estrategias evolutivas (EE)

En el año 1964 en la Universidad Técnica de Berlín, en Alemania, los estudiantes de ingeniería Ingo Rothenberg, Hans-Paul Schwefel y Paul Bienert, definieron lo que se daría a conocer como *EE*, que consistía de un método para optimizar funciones de varias variables que modelaban dispositivos tales como perfiles de alas de avión. Se inspiran en la evolución que puede tener un solo individuo influenciado solamente por la mutación (operador principal) que se basa en una variable aleatoria con distribución normal, y de

forma secundaria por la propia recombinación de los genes de sus antepasados. En la EE se trabaja directamente sobre los fenotipos, por lo que no se realiza la codificación de las variables.

Primero se propuso la EE $(1 + 1)$ que evoluciona a un solo individuo. Posteriormente se desarrollaron otras EE para poblaciones de más de un individuo.

La población inicial es de tamaño μ , y la aplicación de los operadores genéticos genera λ hijos⁵. Si para generar a la nueva población se realiza la selección considerando solamente a los λ hijos se le llama EE (μ, λ) . Si, en cambio, se consideran tanto a los padres como a los hijos se le denomina EE $(\mu + \lambda)$. La selección es determinística por lo que los mejores μ individuos pasan a la siguiente generación.

Algoritmo 1: Estrategias evolutivas

Generar la población inicial

Calcular la función de aptitud para cada individuo de la población

Repetir

Aplicar el operador genético de mutación a los individuos de la población

Aplicar el operador genético de recombinación a los individuos de la población

Calcular la función de aptitud para cada individuo de la población

Aplicar un operador de selección a los individuos de la población

Hasta que se cumpla una condición de terminación.

1.4.2 La programación evolutiva (PE)

En 1965 Lawrence J. Fogel y los investigadores Owens y Walsh trabajando con máquinas de estados finitos, las hicieron evolucionar, aplicando cambios aleatorios a los correspondientes diagramas de transición de estados para hacerlos más aptos para predecir secuencias de símbolos, creando con ello la *PE*. En esta técnica el aprendizaje se ve como un comportamiento adaptativo y se enfatizan los nexos de comportamiento entre padres e hijos. Se inspira en el principio de la evolución al nivel de las especies. Su operador único es la mutación, utiliza selección probabilística, y la recombinación no es permitida debido a que especies distintas no se mezclan entre sí.

⁵ μ y λ son variables que representan a los padres y a los hijos respectivamente.

Posiblemente esta técnica evolutiva fue la primera en aplicarse a problemas de predicción. Al mismo tiempo, con la PE se utilizó por vez primera una representación con codificación de longitud variable, ya que el número de estados de los autómatas variaba como resultado de la mutación. Forma parte de los primeros intentos de simular co-evolución.

Algoritmo 2: Programación evolutiva

Generar la población inicial

Repetir

Aplicar el operador genético de mutación a los individuos de la población

Calcular la función de aptitud para cada individuo de la población

Aplicar un operador de selección a los individuos de la población

Reemplazar la población actual por la seleccionada

Hasta que se cumpla una condición de terminación.

1.4.3 Los algoritmos genéticos (AG)

A principios de los años 1960s, John H. Holland junto con otros colegas y alumnos de la Universidad de Michigan, desarrolló los AG para resolver problemas de aprendizaje de máquina. Para ello analizó el fenómeno de adaptación en sistemas naturales y artificiales, logrando abstraer en un primer modelo tentativo, las características esenciales del proceso evolutivo tal como se observa en la naturaleza, con el objeto de utilizarlo en un sistema computacional.

Los AG trabajan con una representación que permite dos interpretaciones, una al nivel del genotipo que es la carga genética heredada por sus antepasados, y otra al nivel del fenotipo que son las características visibles del individuo. Los individuos de la población inicial normalmente se generan en forma aleatoria. Los operadores genéticos trabajan a escala genotípica sobre la representación elegida (p. ej., binaria, real, etc.) obteniéndose en consecuencia una nueva generación de la población, donde el operador genético principal es la recombinación y el operador secundario es la mutación.

Algoritmo 3: Algoritmo genético

Generar la población inicial

Calcular la función de aptitud para cada individuo de la población

Repetir

Aplicar un operador de selección a los individuos de la población

Aplicar el operador genético de recombinación a los individuos de la población

Aplicar el operador genético de mutación a los individuos de la población

Hasta que se cumpla una condición de terminación.

1.5 Elementos de optimización

1.5.1 Optimización

Los problemas de optimización se caracterizan por [9]:

1. Variables de decisión, que son una abstracción de los criterios relevantes del problema y que se representan como cantidades numéricas, las que serán determinadas por la optimización.
2. Funciones objetivo, que son las relaciones que deben cumplir las variables de decisión y son expresadas como funciones computables.
3. Restricciones, que son las cotas dentro de las que se puede asignar valor a las variables de decisión para que la solución sea factible.

Para los problemas de optimización llamados de Programación Lineal existen métodos de solución como el Simplex; para los de Programación No Lineal se requiere usualmente que la función objetivo sea diferenciable; y en lo general no se conoce ningún algoritmo que permita encontrar la solución óptima para un problema en tiempo polinomial.

La optimización global puede entenderse como un problema de hallar un mínimo (o máximo) global. Aunque los problemas de optimización con solo un objetivo pueden tener una única solución óptima, los problemas de optimización multiobjetivo (POM) pre-

sentan posiblemente una incontable combinación de soluciones, las cuales se pueden ver como vectores de un conjunto de puntos dispersos en el espacio de soluciones, de donde el tomador de decisiones seleccionará según sus propios intereses a los vectores que considere como soluciones aceptables.

1.5.2 Optimización multiobjetivo

La denominada optimización vectorial, multicriterio o multiobjetivo, según Osyczka se define como [47]:

“El problema de encontrar un vector de variables de decisión que satisfaga ciertas restricciones y optimice una función vectorial cuyos elementos representen las funciones objetivo. Estas funciones forman una descripción matemática de los criterios de desempeño que usualmente están en conflicto entre sí y que se suelen medir en unidades diferentes. Por lo tanto, el término *optimizar* significa encontrar una solución tal que proporcione valores para todos los objetivos que resulten aceptables para el diseñador”.

DEFINICION 1 Problema general de optimización multiobjetivo (POM)

Formalmente se define como: Encontrar el vector $\vec{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ que satisfaga las m restricciones de desigualdad⁶:

$$g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.1)$$

que satisfaga las p restricciones de igualdad

$$h_i(\vec{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1.2)$$

y que optimice la función vectorial

$$\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})]^T \quad (1.3)$$

donde: $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es el vector de variables de decisión.

Es decir, se busca dentro de un conjunto F de valores que satisfacen a 1.1 y 1.2 al conjunto $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ que produzca los valores óptimos para todas las funciones objetivo.

⁶ Donde T indica la transpuesta del vector columna a un vector fila.

Las restricciones 1.1 y 1.2 definen la *región factible* F , y cualquier punto \vec{x} en F forma parte de la *solución factible*. La función vectorial $\vec{f}(\vec{x})$ mapea al conjunto F en el conjunto X , que representa todos los valores posibles de las funciones objetivo. Los k componentes del vector $\vec{f}(\vec{x})$ representan los criterios (posiblemente no conmensurables, o sea, expresados en unidades diferentes) que se considerarán. Las restricciones $g_i(\vec{x})$ y $h_i(\vec{x})$ representan las limitantes impuestas sobre las variables de decisión. El vector \vec{x}^* representa las soluciones óptimas (de las que usualmente se tendrá más de una).

Cada punto en \vec{x} representa una posible solución, y establece un punto en $\vec{f}(\vec{x})$ que evalúa la aptitud o calidad de la solución en términos de los valores de las funciones objetivo.

Muy rara vez existirá una solución *única* a un POM, que consistirá de una \vec{x}^* tal que para toda $i = 1, 2, \dots, k$ se cumpla $\bigwedge_{x \in F} (f_i(\vec{x}^*) \leq f_i(\vec{x}))$, y al menos para una i se cumpla que $f_i(\vec{x}^*) < f_i(\vec{x})$ (asumiendo minimización).

En tal caso \vec{x}^* sería la solución deseable, pero en la práctica casi nunca existen situaciones como ésta, en las que todas las $f_i(\vec{x})$ tengan un mínimo en F localizado en un punto común \vec{x}^* . Más bien, suele tenerse un conjunto de soluciones posibles, las cuales representan posibles compromisos entre los objetivos del problema.

Optimizar varias funciones objetivo a la vez, no se traduce en encontrar un óptimo para cada función, sino más bien en proponer un conjunto de puntos en los que cada función objetivo contribuya en alcanzar una *buena* aptitud total, la cual será establecida y evaluada por el diseñador, un inversionista en nuestro caso.

Hay tres posibles POM:

- Minimizar todas las funciones objetivo.
- Maximizar todas las funciones objetivo.
- Minimizar algunas funciones objetivo y maximizar otras.

Por simplicidad normalmente todas las funciones son convertidas a una misma forma, a fin de minimizar o maximizar todas las funciones objetivo del problema.

En el año de 1896 Vilfredo Pareto [48] estableció el origen de la investigación en optimización multiobjetivo enunciando el concepto de *óptimo de Pareto*.

DEFINICION 2 Óptimo de Pareto Dadas k funciones objetivo del problema, decimos que un punto $\vec{x}^* \in F$ es un *óptimo de Pareto* si para toda $\vec{x} \in F$, tal que para toda $i = 1, 2, \dots, k$

$$f_i(\vec{x}^*) \leq f_i(\vec{x}) \quad (1.4)$$

y, al menos existe una i tal que

$$f_i(\vec{x}^*) < f_i(\vec{x}) \quad (1.5)$$

Esta definición dice que \vec{x}^* es un óptimo de Pareto si no existe dentro del espacio de búsqueda F un vector factible \vec{x} que mejoraría algún criterio sin hacer que empeore en al menos otro de ellos, es decir que lo *domine*, por lo que se conoce a \vec{x}^* como una solución *no-dominada*.

DEFINICION 3 Dominancia de Pareto. Un vector $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$ se dice que domina al vector $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$ denotado esto como $\vec{u} \preceq \vec{v}$ si y solamente si u es parcialmente menor que v . es decir,

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, u_i \leq v_i \wedge \exists i \in \{1, \dots, k\} : u_i < v_i. \quad (1.6)$$

El óptimo de Pareto casi siempre produce no una, sino un conjunto de soluciones a las que se les llama *no-inferiores* o *no-dominadas*.

DEFINICION 4 Conjunto de Óptimos de Pareto. Dado un POM $\vec{f}(\vec{x})$, el conjunto de óptimos de Pareto P_{true} se define como:

$$P_{true} = \left\{ \vec{x} \in F \mid \neg \exists \vec{x}' \in F : \vec{f}(\vec{x}') \preceq \vec{f}(\vec{x}) \right\} \quad (1.7)$$

El frente de Pareto es el contradominio del conjunto de puntos que forman el conjunto de óptimos de Pareto. Es decir, el frente de Pareto son los valores de las funciones objetivo correspondientes a las soluciones que pertenecen al conjunto de óptimos de Pareto.

DEFINICION 5 Frente de Pareto. Dado un POM $\vec{f}(\vec{x})$ y el conjunto óptimo de Pareto P_{true} , el frente de Pareto FP_{true} se define como:

$$FP_{true} = \left\{ \vec{u} = \vec{f} = f_1(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x}) \mid \vec{x} \in P_{true} \right\} \quad (1.8)$$

Resulta imposible determinar de manera analítica la expresión matemática que corresponde al frente de Pareto de un problema arbitrario. Aproximar dicho frente es precisamente el objetivo principal de la optimización evolutiva multiobjetivo (por sus siglas en

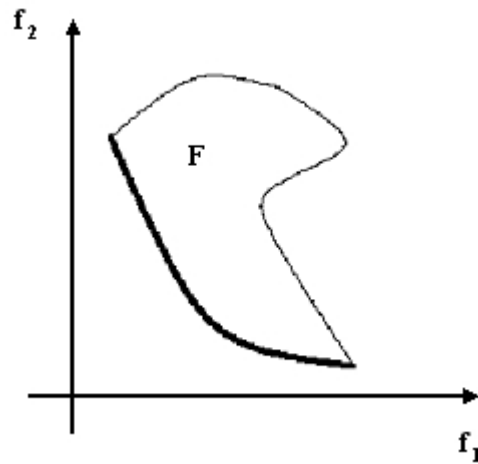


Fig. 1.6. Frente de Pareto para un problema en que se quieren minimizar dos funciones objetivo.

inglés: EMOO). En la figura 1.6 [5] se tienen dos funciones objetivo que a partir del espacio de soluciones F establecen un conjunto de óptimos de Pareto cuyo frente de Pareto correspondiente se muestra como una línea gruesa.

1.6 Tratamiento de problemas multiobjetivo con técnicas evolutivas

Los problemas financieros se basan en eventos y hechos sucedidos en el mundo real. Por ello su modelación y administración definen una gran cantidad de variables, de las cuales es imposible manejar todas ellas; además, aún manipulando todas ellas, el modelo no representará completamente a la realidad, debido a aspectos de capacidad para registrar toda la secuencia histórica de las variables y su relación entre las mismas. Asimismo, hay dificultad para obtener los datos históricos financieros de quienes se dedican al registro de ellos, pues éste es un servicio no gratuito.

La optimización multiobjetivo es un área de investigación importante debido a que la mayoría de los problemas del mundo real son por naturaleza multiobjetivo. Desde este punto de vista multiobjetivo no existe una definición de *óptimo global*, como pudiera ser fácilmente entendida en el caso de la optimización con un solo objetivo. Esto se debe a que los problemas multiobjetivo suelen tener múltiples soluciones óptimas. Lo que complica la

decisión acerca de cuál técnica obtiene la mejor respuesta, e incluso el realizar una comparación entre tales técnicas, porque la decisión de cuál es la mejor respuesta la establece el usuario del modelo, quien aplicará para ello sus propios criterios subjetivos.

El área de investigación nombrada *optimización evolutiva multiobjetivo* (por sus siglas en inglés: EMOO), se basa en la búsqueda de soluciones utilizando un AE como una forma alternativa para lidiar con los problemas que presentan varios objetivos a la vez.

Rosenberg [50] en el año de 1967, sugiere el primer uso de AG para optimización multiobjetivo, utilizando las propiedades de cercanía a alguna composición química, en su simulación de la genética y la química de una población de organismos unicelulares. Su implementación consideró una sola propiedad, por lo que la técnica para lidiar con objetivos múltiples no se llevó a la práctica, aunque la sugerencia marcó el inicio de la investigación en torno a optimización multiobjetivo usando técnicas evolutivas.

Si se parte de que un AG requiere de información escalar sobre el valor de aptitud de un individuo para operar, la idea más simple que se propone para lidiar con varios objetivos es, reunirlos en un objetivo único usando una combinación de operaciones aritméticas (suma, multiplicación, etc.). No obstante, existen problemas con esta técnica. Primero se debe poseer información precisa sobre el rango de los objetivos, a fin de escalarlos y evitar que uno de ellos domine a los demás en magnitud numérica. Esto implica conocer “a priori” el comportamiento de cada una de las funciones objetivo, lo cual en la mayoría de las aplicaciones del mundo real implica un proceso muy costoso (en cuanto a recursos computacionales, de los datos y sus medidas estadísticas). Si esta combinación de objetivos es posible, esta técnica no sólo es la más simple de implementar, sino que, además es la más eficiente, porque no se requiere posterior interacción con el usuario, y si el AG tiene éxito en el proceso de optimización, entonces los resultados serán al menos subóptimos en la mayoría de los casos.

La primera implementación de un algoritmo evolutivo multiobjetivo (AEMO) fue hecha por Schaffer en los ochenta con el *Vector Evaluated Genetic Algorithm* (VEGA) [52]. Con ello inicia la primera generación de AEMO que se caracterizan por el uso de mecanismos de selección basados en el concepto de optimalidad a través de la dominancia de Pareto, y por el uso de diferentes técnicas para la compartición de aptitud para mantener diversidad (nichos, σ_{share}). Los algoritmos más representativos de esta primera generación fueron: el *Nondominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA) de 1994 [58], el *Niched-Pareto Genetic Algorithm* (NPGA) [27] de 1994, y el *Multi-Objective Genetic Algorithm* (MOGA) de 1993 [24].

La implementación del mecanismo de elitismo en el contexto de optimización multiobjetivo dio paso a la segunda generación de AEMO. El elitismo en EMOO normalmente es implementado a través de una población externa o secundaria, en la que se almacena a los individuos no-dominados encontrados durante el proceso de búsqueda. El elitismo también puede ser implementado mediante el uso de selección $(\mu + \lambda)$, donde los padres compiten contra los hijos, y los individuos no-dominados resultantes son los que se retienen para la siguiente generación. Sin embargo, en cualquiera de los dos casos, se requiere cumplir con restricciones que ayuden a lograr la mejor distribución posible de los individuos no-dominados. Los principales algoritmos de esta segunda generación son: el *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA) de 1999 [67], el *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2) de 2001 [66], el *Pareto Archived Evolution Strategy* (PAES) de 2000 [33], el *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) de 2000 [15] [16], el *Niched-Pareto Genetic Algorithm 2* (NPGA2) de 2001 [20], el *Pareto Enveloped-based Selection Algorithm* (PESA) de 2000 [10], y el *Micro Genetic Algorithm* (micro-GA) de 2001 [8] [4] [62].

De las diferentes técnicas evolutivas que se han propuesto para la optimización multiobjetivo [9] para los fines de este trabajo se consideraron tres AEMO representativos del estado del arte en el área: NSGA-II, PAES y micro-AG para optimización multiobjetivo.

1.6.1 NSGA-II

En 1994, N. Srinivas y Kalyanmoy Deb [58] propusieron el NSGA (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm*) que utiliza una idea de jerarquización de soluciones con base en dominancia de Pareto propuesta por Goldberg, la cual se realiza por ondas o capas (*waves*). Se comparte aptitud entre los individuos con el fin de mantener la diversidad.

La segunda versión de este algoritmo llamada NSGA-II fue propuesta por Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal y T. Meyarivan [15] [16] en el año 2000. Utiliza una técnica de muestreo de Pareto que jerarquiza a la población completa de manera más eficiente que su antecesor. El NSGA-II es computacionalmente más eficiente que su primera versión debido a que usa un operador de agrupamiento (*crowding*) para mantener diversidad y que, además no requiere de parámetros. Este operador permite que individuos similares se reemplacen entre sí con el fin de evitar que más y más individuos dominen un mismo nicho. Este proceso es similar al que lleva a cabo PAES mediante su rejilla a-

daptable. Usa elitismo pero no mediante un archivo externo como los otros algoritmos sino mediante una selección $(\mu + \lambda)$.

Sin embargo, el NSGA-II muestra problemas al generar regiones aisladas del frente de Pareto, así como para lidiar con más de dos funciones objetivo [9].

1.6.2 PAES

Propuesto en el año 2000 por Joshua D. Knowles y David W. Corne [33] el PAES (*Pareto Archived Evolution Strategy*) es el algoritmo más simple posible de EMOO. Consiste de una EE $(1 + 1)$ donde un único padre genera un único hijo, utiliza búsqueda local y un archivo histórico externo para almacenar a los individuos no-dominados que se obtengan durante el proceso evolutivo. Este archivo se usa como una referencia contra cada uno de los individuos que se obtienen como resultado de la mutación. El algoritmo consta de tres partes: el generador de soluciones candidatas, la función de aprobación de las soluciones candidatas, y el archivo de Soluciones no-dominadas (*NDS: NonDominated-Solutions archive*)

Cuando se genera un individuo no-dominado, éste es comparado con los individuos almacenados hasta ese momento en el archivo externo, y en el caso de que resulte ser nuevamente no-dominado, entrará al archivo externo. La diversidad se mantiene mediante una rejilla (o malla) que divide el espacio de las funciones objetivo de manera recursiva y que, además es auto-adaptable, la cual es computacionalmente más eficiente que los métodos que utilizan nichos, esto debido a que su adaptabilidad no requiere de parámetros extra (necesarios al usar nichos) que afectarían el desempeño del algoritmo. Cada individuo es colocado en la celda de la rejilla que le corresponde según sus coordenadas en el espacio de búsqueda, de manera que se mantiene el control del número de individuos que se encuentran dentro de cada celda para lograr una mejor distribución de las soluciones generadas.

Knowles y Corne experimentaron también con EE $(1 + \lambda)$ y $(\mu + \lambda)$ sin encontrar mejoras significativas en los resultados obtenidos, pero sí un aumento en el esfuerzo computacional involucrado.

1.6.3 micro-AG para optimización multiobjetivo

Desarrollado en 2001 por Carlos Coello y Gregorio Toscano [8] [4] [62] el micro-AG (*micro-Genetic Algorithm*) es un algoritmo que trabaja con una población principal

pequeña (cuatro individuos) y un proceso de reinicialización. Es una técnica de muestreo de Pareto que incorpora un método de selección basado en tres formas de elitismo y jerarquización de Pareto.

El micro-AG se fundamenta de las siguientes premisas:

- Para reducir el chequeo de no-dominancia de la población, se utilizan muy pocos individuos en la población principal, además de incluir una población externa (archivo histórico).
- Se usa una malla adaptativa similar a la de PAES como mecanismo de posicionamiento geográfico para mantener la diversidad en las soluciones no-dominadas encontradas.

El algoritmo es el siguiente. Primero, se genera aleatoriamente una población que se almacena en un archivo que funciona como una memoria de población (MPo), la cual está dividida en dos porciones: una reemplazable (MR) y una no-reemplazable (MNoR), de la que se eligen aleatoriamente a los individuos que forman a la población principal. La MNoR no cambia durante todo el proceso del algoritmo y es el medio para proveer de diversidad a la población. La MR evoluciona en cada ciclo del micro-AG.

En cada ciclo del micro-AG, la población es tomada (con una cierta probabilidad) de la MPo, por lo que se mezclan los individuos de ambas porciones (MNoR y MR) aplicándoles los operadores genéticos (cruza y mutación). Al final de cada ciclo, dos vectores no-dominados son escogidos de la población principal y se les compara con el contenido de la población externa (PoEx) (inicialmente vacía). Si los vectores (o el vector) continúan siendo no-dominados, se incluyen en la PoEx y se eliminan de la misma todos los individuos dominados. Cuando converge⁷ a una solución selecciona a los individuos no-dominados que entrarán a la MPo, provocando con ello, que periódicamente algunos de los individuos almacenados en la PoEx, ingresen a la MR.

De tal forma que el micro-AG usa tres formas de elitismo: retiene individuos no-dominados encontrados en cada ciclo, usa una MR que se actualiza cada cierto número de intervalos y reemplaza la población por las mejores soluciones obtenidas.

⁷ **Convergencia nominal:** Se refiere al punto en el cual se considera que un micro-AG ha convergido (es decir, ya no podrá mejorar la máxima aptitud de su población). Un criterio de convergencia nominal puede ser por ejemplo, cuando todos los individuos tienen sus genotipos idénticos o muy parecidos.

Capítulo 2

Portafolios de inversión

Salas Harms en su artículo LA TEORÍA DE CARTERA [26], Van Horne en su libro ADMINISTRACIÓN FINANCIERA [28] y Messuti en su libro de SELECCIÓN DE INVERSIONES [41] explican los conceptos básicos que servirán como antecedente para entender el modelo de Media-Varianza de Markowitz, como se verá en los siguientes apartados⁸.

Es fundamental considerar los tipos de información disponible, por ejemplo, el registro de los hechos relativos al desempeño de las emisoras, los cuales están plasmados en los estados financieros y que requieren de una interpretación para su entendimiento. No obstante, si el invertir tan sólo se limitara a seleccionar a la emisora que demostró el mejor desempeño según su historia descrita en sus estados financieros, el problema de selección sería determinístico, esto es, no estaría asociado ningún riesgo o incertidumbre, o cualquier otro objetivo financiero asociado al problema.

Pero las inversiones se apoyan en la toma de decisiones basadas en propuestas estimadas. Las decisiones de inversión se toman a partir del análisis de la información del pasado, del estudio subjetivo de las posibilidades de desarrollo en términos de valor de los proyectos de la emisora, y de los factores externos que pueden afectar el mercado en general⁹. Y aún más, cada inversionista tendrá su propia valoración de lo que desea obtener, del riesgo que está dispuesto a asumir, de las variantes de su función de utilidad personal, la liquidez requerida, el plazo de la inversión, los dividendos, etc.¹⁰

⁸ Se pueden consultar los vocablos financieros utilizados en esta tesis en el Glosario al final de este documento.

⁹ Los elementos de análisis para evaluar un portafolio de inversión pueden ser básicamente el riesgo y el rendimiento, pero pueden influir otros factores que podrían afectar el desempeño del portafolio como el entorno económico nacional e internacional, la situación financiera, la administración, la valoración del sector donde se desarrolla la emisora, etc. Cada uno de estos factores, si se expresa en forma cuantitativa, puede ser una variable más a considerar.

¹⁰ Un aspecto importante es considerar el valor del dinero en el tiempo. Pocos accionistas pensarían favorablemente en un proyecto que prometiera sus primeras ganancias en 100 años, no importa cuán grandes fueran éstas.

2.1 Medición del rendimiento

Para hacerse tan valiosa como sea posible para los accionistas¹¹, una compañía¹² debe escoger primero la mejor combinación de decisiones sobre inversiones, financiamiento y dividendos. Cualquiera de estas decisiones participa en la modelación del carácter de riesgo-rendimiento de la compañía y del valor de la empresa a ojos de los proveedores de capital. En otras palabras, de acuerdo con la información acerca de estas tres decisiones, los inversionistas formulan expectativas respecto del riesgo y rendimiento involucrados en la tenencia de instrumentos financieros.

Se debe considerar el rendimiento esperado (*beneficio*)¹³ de un instrumento financiero y el riesgo de conservarlo. Si suponemos que los inversionistas están razonablemente bien diversificados en los instrumentos financieros que tienen, en última instancia se puede valorar una compañía, pero primero se debe considerar el valor del dinero en el tiempo y cómo calcular el valor final o futuro, el valor actual y la tasa interna de retorno (rendimiento) de una inversión.

Se puede estimar la probabilidad de ocurrencia de un evento futuro, extrapolando las cifras estadísticas sobre la ocurrencia en el pasado de ese mismo evento. Al estimar probabilidades de esta forma, la distribución de frecuencias de los datos históricos, que ahora representará la distribución de probabilidad de ese mismo evento en el futuro, mostrará una dispersión mayor o menor en torno a una media, por ejemplo, de los rendimientos históricos de una acción.

Ahora bien, toda vez que cualquier distribución tiende a representar las probabilidades verdaderas de ocurrencia de los distintos eventos solamente en el largo plazo o en los grandes números, cuando estamos planeando para el corto plazo, cómo estimar los rendimientos esperados de una cartera durante el próximo año, una distribución más cerrada mostrará resultados más predecibles. Así, en el extremo, una distribución con una varianza de cero, como la que representa los rendimientos esperados hasta su vencimiento de títulos de gobierno, mostrará resultados plenamente predecibles.

¹¹ Usualmente el accionista es partícipe, junto con otros accionistas, en la empresa. Para los fines de este documento, el concepto de empresa incluirá el caso donde solamente está formada por un accionista.

¹² Se utilizará indistintamente organización, compañía, empresa, firma para referirse a una entidad organizada que realiza negocios o servicios.

¹³ Se nombrará indistintamente como *beneficio* o *ganancia* al *rendimiento esperado*.

El *rendimiento esperado* sobre la base de una distribución de probabilidades de posibles rendimientos para un cierto periodo de tiempo, es:

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^m r_k \times p_k \quad (2.9)$$

donde: r_k es el rendimiento, p_k es la probabilidad de ocurrencia de ese rendimiento; y m es el número total de posibilidades para un cierto periodo de tiempo.

Y si consideramos el rendimiento esperado para un instrumento financiero i específico, puede estimarse mediante:

$$\mu_i = \bar{r}_i = \frac{\sum_{t=1}^m \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}}{m} \times 100 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

donde: $P_{i,t}$ es el precio de mercado del instrumento financiero i en el momento t , $P_{i,t-1}$ es el precio del instrumento financiero i en el momento $t - 1$, m es el número total de periodos de tiempo, y n es el número de instrumentos financieros disponible.

2.2 Medición del riesgo: la desviación estándar

En un mundo de incertidumbre, quizás no se logre obtener el beneficio o rendimiento esperado al poseer un instrumento financiero. Se puede pensar en el riesgo como la posibilidad de que al tener un instrumento financiero, el rendimiento obtenido se desvíe del rendimiento esperado. Se dice que será mayor el riesgo del instrumento financiero cuanto mayor sea la magnitud de la desviación y mayor la probabilidad de que ocurra. Para medir la amplitud de la distribución de rendimientos posibles, se calcula el coeficiente de variación o la desviación estándar¹⁴. Al relacionar la desviación estándar con una diferencia específica del rendimiento esperado, se puede determinar la probabilidad de que se presente dicho resultado.

De manera que la dispersión o amplitud de la distribución de probabilidades de rendimientos posibles refleja el grado de incertidumbre del inversionista. Una distribución con una pequeña desviación estándar en relación con su rendimiento esperado, indica poca dispersión y un alto grado de confiabilidad en el resultado (o bajo riesgo). Una distribución con rendimientos sumamente volátiles de un periodo a otro y por tanto con una gran desviación estándar en relación con su rendimiento esperado, indica un alto grado de incertidumbre

¹⁴ El cuadrado de la desviación estándar (σ) se conoce como la *varianza de la distribución* (σ^2).

acerca de la ganancia posible de la inversión (o alto riesgo). Así puede verse al riesgo como variación en rendimientos.

Para un *inversionista con aversión al riesgo*, el rendimiento muestra una tendencia creciente a una tasa que va disminuyendo conforme se den incrementos sucesivos en la riqueza¹⁵. Por tanto, mientras mayor sea la varianza o desviación estándar de la distribución de probabilidades de los posibles rendimientos de una inversión, menor será el rendimiento esperado de esa inversión y resultará menos atractiva (para este tipo de inversionista).

La *desviación estándar* sobre la base de una distribución de probabilidades de posibles rendimientos para un cierto periodo de tiempo, es:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^m (r_k - \bar{r})^2 \times p_k}. \quad (2.11)$$

donde: r_k es el rendimiento, p_k es la probabilidad de ocurrencia de ese rendimiento, \bar{r} es la media de rendimiento, y m es el número total de posibilidades para un cierto periodo de tiempo.

Y si consideramos la desviación estándar para un instrumento financiero i específico, puede estimarse mediante:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^m (r_{it} - \bar{r}_i)^2}{m}}. \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

donde: r_{it} es el rendimiento del instrumento financiero i en el periodo t , \bar{r}_i es la tasa media de rendimiento (a partir de los datos) del instrumento financiero i , m es el número total de periodos de tiempo, y n es el número de instrumentos financieros disponible.

¹⁵ Los fundamentos de la Teoría de Juegos fueron expuestos por John Von Neumann, quien en 1928 demostró el teorema básico del *min-max* [45], quedando establecido el tema y proponiendo un enfoque acerca de la utilidad con la publicación en 1944 por parte de John Von Neumann y Oskar Morgenstern de *Theory of Games and Economic Behavior* [44].

También, para una explicación no técnica, revisar: Morton D. Davis *Teoría del Juego*, colección Alianza Universidad 8, Alianza Editorial, Madrid 1971.

2.3 Riesgo y rendimiento

La evidencia empírica muestra una relación directa entre riesgo y rendimiento¹⁶, lo que implica que un inversionista puede aumentar su rendimiento sólo mediante la aceptación de mayor riesgo, pero esto se da únicamente en el caso de inversiones en activos individuales. La integración de carteras de inversión o de conjuntos de instrumentos financieros, presenta la posibilidad de reducir el riesgo mediante la diversificación en la tenencia de tales instrumentos financieros, sin reducir correlativamente el rendimiento de los mismos.

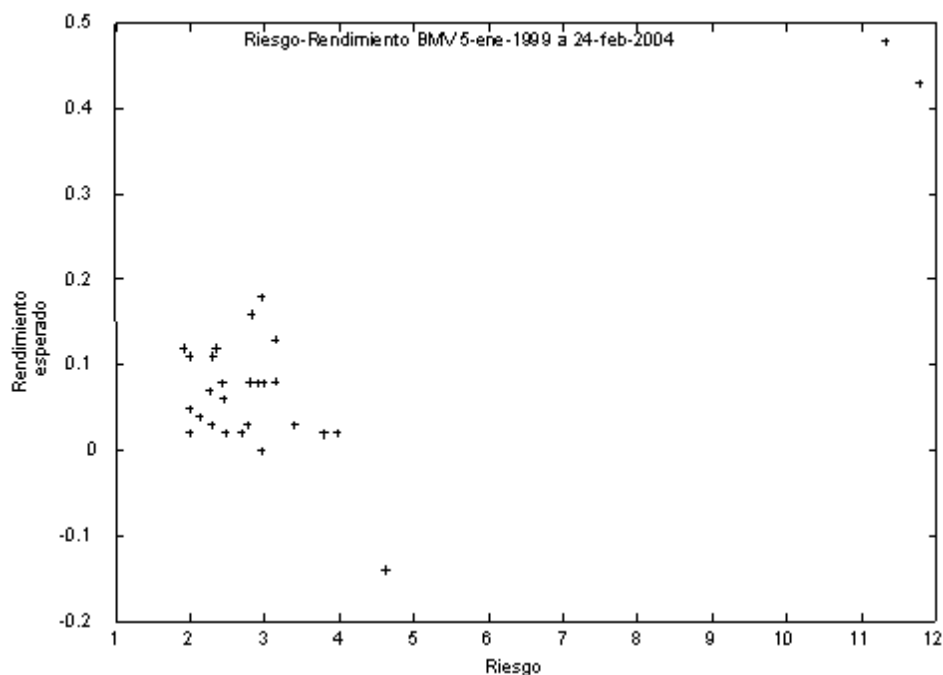


Fig. 2.7. Evidencia empírica de crecimiento entre el riesgo y el rendimiento esperado. Elaboración propia con datos de la BMV.

Graficando la información de las 27 emisoras tomadas de la BMV para nuestro estudio, se puede observar en la figura 2.7 la relación entre el riesgo y el rendimiento de los

¹⁶ Salas Harms [26] refiere un trabajo de 1989 por parte de Ibbotson Associates, Inc. titulado *Stocks, Bonds, Bills and Inflation: 1989 Yearbook*, que es un estudio sobre el desempeño de distintos tipos de instrumentos en Estados Unidos entre 1926 y 1988, mostrando una relación en los instrumentos, que a mayor desviación estándar ofrecían un mayor rendimiento.

instrumentos financieros, que muestra una tendencia ascendente o de pendiente positiva, cuando se consideran los instrumentos de mayor rendimiento.

2.4 Portafolios de inversión de instrumentos financieros

Una cartera o portafolio de inversión es un conjunto de inversiones financieras que cumple con los objetivos de liquidez, rendimiento, plazo y riesgo fijados por el inversionista.

De acuerdo con la máxima de *Media-Varianza* de Markowitz, un inversionista debe buscar un portafolio de inversión que se encuentre en el *conjunto-eficiente* [38]. Un portafolio no es eficiente si existe otro portafolio con un rendimiento esperado mayor y una desviación estándar menor, un rendimiento esperado más elevado y la misma desviación estándar, o el mismo rendimiento esperado pero con una desviación estándar menor. Ver figura 2.10 y una explicación más detallada en la sección 2.5 *Selección de instrumentos financieros para la creación de portafolios de inversión*.

Las siguientes fórmulas de rendimiento y riesgo de un portafolio son aplicables tanto para una distribución de probabilidades de rendimientos posibles, como para el caso en que se estimaron los rendimientos y riesgos de los instrumentos financieros.

El *rendimiento esperado* r_p de un portafolio es un promedio ponderado de los rendimientos esperados para los instrumentos financieros que comprenden ese portafolio:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n E(r_i) \times w_i \implies \mu_p = r_p = \sum_{i=1}^n \mu_i \times w_i \quad (2.13)$$

donde: μ_i es el rendimiento esperado del instrumento financiero i ; w_i es la proporción del total de fondos invertidos en el instrumento financiero i ; y n es el número total de instrumentos financieros en el portafolio.

El riesgo de un portafolio depende no solamente de las desviaciones estándar de los instrumentos financieros individuales que comprenden el portafolio, sino también de la relación que exista entre el rendimiento de cada instrumento financiero con respecto al resto del portafolio, es decir la *correlación de los rendimientos posibles en un portafolio*.

Al seleccionar instrumentos financieros, cuyos rendimientos tienen poca o inversa relación entre sí, el inversionista puede reducir el riesgo total. A esto se le conoce como *diversificación* (ver figura 2.8). La intención es obtener una mezcla de rendimientos en el tiempo, cíclicos (Valor A) y contracíclicos (Valor B). Cantidades similares invertidas en

esos instrumentos financieros, reducirán la dispersión del rendimiento de la inversión total (combinación de A y B). La razón por la que el promedio ponderado de la desviación estándar no expresa la desviación estándar correcta del portafolio, es que pasa por alto la *relación o covarianza* entre los rendimientos de los instrumentos financieros que forman el portafolio.

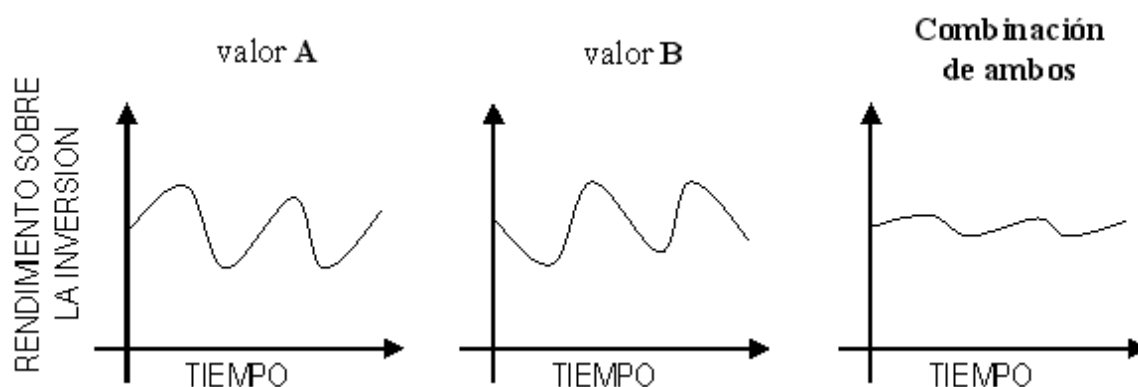


Fig. 2.8. Efecto de la diversificación.

Al diversificar la tenencia incluyendo instrumentos financieros que no tienen una correlación perfecta entre sí, se puede reducir el riesgo relacionado con el rendimiento esperado.

Aun el diversificar una inversión asignándola a dos instrumentos financieros puede proporcionar una reducción importante en el riesgo. Esto será así siempre que los rendimientos entre dos instrumentos financieros estén menos que perfectamente correlacionados, rendimientos que para este tipo de análisis financiero, tradicionalmente se han definido como cambios en los precios de mercado¹⁷ de las acciones comunes, aun cuando algunos autores añaden a éstos el pago de dividendos. De esta manera, la caída brusca en el precio de un instrumento financiero puede corresponder a una caída menos pronunciada de otro e incluso a un aumento en el precio de un tercero. En ambos casos la variación total de una cartera sería menor que la variación promedio de los instrumentos financieros que la com-

¹⁷ El mercado financiero permite el intercambio de fondos y papel que representa valores (instrumentos financieros), y ofrece una extensa gama de estos productos a los ahorradores/inversionistas.

ponen, Aun cuando en la práctica no se espera ver instrumentos financieros cuyos precios se muevan constantemente en direcciones opuestas a todo el resto de ellos.

Un ejercicio en que se combinaran aleatoriamente dos o más instrumentos financieros en un portafolio mostraría una rápida reducción en la variación total, que inicialmente sería muy pronunciada. La variación total puede ser disminuida de esta manera en aproximadamente 50 %; pero con carteras de quince o más títulos, la contribución marginal a la reducción del riesgo será muy pequeña. Esto permite proponer la conclusión importante de que se puede obtener un beneficio significativo en la diversificación con relativamente pocos instrumentos financieros [26].

La *desviación estándar* de un portafolio σ_p se obtiene de:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times \sigma_{ij}} \quad (2.14)$$

donde: n es el número total de instrumentos financieros en el portafolio, w_i es la proporción del total de fondos invertidos en el instrumento financiero i , w_j es la proporción invertida en el instrumento financiero j , y σ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos posibles para los instrumentos financieros i y j , y se cumple que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

La característica relevante propuesta por Markowitz en la ecuación (2.14) es que la desviación estándar de un portafolio depende no sólo de las varianzas de los instrumentos financieros individuales, sino de la covarianza de los rendimientos posibles entre cada par de instrumentos financieros, la cual es una medida del grado al que se espera varíen juntas, en lugar de independientemente una de la otra¹⁸. Al aumentar el número de instrumentos financieros en un portafolio, los términos de la covarianza se vuelven más importantes en relación con los términos de la varianza. Para expresarlo de manera más formal, el término *covarianza* en la ecuación (2.14) es:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{ij} \quad (2.15)$$

¹⁸ Las dos Σ s significan que debemos considerar las covarianzas para todas las combinaciones posibles en pares de los instrumentos del portafolio. Por ejemplo para $n = 4$ la matriz de covarianzas sería:

$$\begin{array}{cccc} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \sigma_{1,4} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & \sigma_{2,4} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} & \sigma_{3,4} \\ \sigma_{4,1} & \sigma_{4,2} & \sigma_{4,3} & \sigma_{4,4} \end{array}$$

donde: σ_i es la desviación estándar para el instrumento financiero i , σ_j es la desviación estándar para el instrumento financiero j , y ρ_{ij} es la *correlación esperada* entre los rendimientos posibles para los instrumentos financieros i y j .

Y puede estimarse de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^m [(r_{it} - \bar{r}_i) \times (r_{jt} - \bar{r}_j)]}{m - 1} \quad \text{para } i = 1, \dots, n \text{ y } j = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

donde: r_{it} es el rendimiento del instrumento financiero i en el tiempo t , \bar{r}_i es el rendimiento esperado del instrumento financiero i , r_{jt} es el rendimiento del instrumento financiero j en el tiempo t , \bar{r}_j es el rendimiento esperado del instrumento financiero j , y m es el número total de periodos de tiempo, y n es el número de instrumentos financieros disponible.

El coeficiente de correlación lineal se define como:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \times \sigma_j} \quad (2.17)$$

Entonces, las bajas covarianzas corresponderán a instrumentos financieros con desviaciones estándar pequeñas o, sobre todo, con una baja correlación en los cambios en sus precios¹⁹; por lo tanto, deben buscarse instrumentos financieros con bajas covarianzas para incorporarlas a un portafolio de inversión y reducir de esta manera el riesgo total.

2.5 Selección de instrumentos financieros para la creación de portafolios de inversión

El origen de los conceptos de la teoría de cartera data del artículo escrito en 1952 por Harry Markowitz [37] [38]. En él Markowitz asocia riesgo y rendimiento e introduce conceptos como rendimientos esperados y medidas de dispersión en la distribución de los mismos, así como la covarianza entre los rendimientos esperados de dos títulos. A partir de estos elementos, Markowitz señala cómo se producen primeramente combinaciones posibles y combinaciones eficaces de riesgo y rendimiento y, finalmente, cómo se genera un conjunto de carteras eficientes de inversión y entre éstas una cartera óptima. Principalmente, Markowitz muestra cómo se puede reducir el riesgo total de un portafolio de inversión combinando instrumentos financieros cuyos rendimientos no se vean afectados de la misma manera, por los factores que producen variaciones en ellos.

¹⁹ En otras palabras, cuyos rendimientos varían conjuntamente a niveles bajos.



Fig. 2.9. Harry M. Markowitz.

Las premisas fundamentales de su modelo son:

1. Un inversionista puede estimar el rendimiento y su distribución de probabilidad para todo instrumento financiero o portafolio de inversión.
2. La media de esa distribución representa su rendimiento esperado.
3. Su varianza o desviación estándar representa el riesgo del instrumento financiero, y junto con la covarianza representan el riesgo del portafolio de inversión.
4. Es preferible un instrumento financiero o cartera con un mayor rendimiento y un menor riesgo.
5. Es eficiente una cartera que ofrece el mayor rendimiento para un nivel de riesgo dado, o el menor riesgo para un nivel de rendimiento dado.
6. Es óptimo para cada inversionista el portafolio de inversión que se encuentra en el punto de tangencia entre el conjunto de carteras eficientes y una de las curvas de indiferencia del inversionista.

La teoría de selección de instrumentos financieros para la creación de portafolios de inversión desarrolla la idea de la diversificación de los instrumentos financieros [38] partiendo del hecho de que si se crea un portafolio que mezcla diferentes riesgos y beneficios se obtiene en suma un equilibrio, que sería difícil de obtener con unos cuantos instrumen-

tos financieros. Esto hace posible combinar los distintos instrumentos financieros de varias formas posibles, obteniéndose diferentes portafolios posibles, pero que cumplen con el objetivo de minimizar el riesgo asociado y maximizar el beneficio, tomando en cuenta el riesgo pretendido por el inversionista [49].

El modelo de Media-Varianza de Markowitz (MV) se define como²⁰:

$$\text{rendimiento del portafolio } \text{máx } E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i \times E(r_i) \quad (2.18)$$

$$\text{riesgo del portafolio } \text{mín } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times \rho_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j \quad (2.19)$$

$$s.a. \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (2.20)$$

$$w_i \geq 0 \quad (2.21)$$

donde: $E(r_p)$ es el beneficio esperado del portafolio p , (r_p) ; $E(r_i)$ es el beneficio esperado del instrumento financiero i , (r_i) ; w_i es el porcentaje de inversión del instrumento financiero i ; w_j es el porcentaje de inversión del instrumento financiero j ; n es el número de instrumentos financieros incluidos en el portafolio; σ_p^2 es el riesgo asociado al portafolio p ; σ_i y σ_j son las desviaciones estándar del rendimiento de los instrumentos financieros i y j ; ρ_{ij} es el coeficiente de correlación de las variabilidades de ambos instrumentos financieros i y j .

La ecuación (2.20) asegura que el portafolio considere totalmente a todos los instrumentos financieros para ser invertidos, y la ecuación (2.21) no permite las ventas en corto.

²⁰ El problema de selección de portafolios considerado por Markowitz, consistente en determinar los pesos w_i ($i = 1, \dots, n$) a ser invertidos en cada instrumento tal que el portafolio resultante es eficiente, es un problema de programación cuadrática:

$$\begin{aligned} \text{máx } E(r_p) &= \sum_{i=1}^n w_i \times E(R_i) \\ s.a. : \sigma_p^2 &= V^* = cte \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ w_i &\geq 0 \end{aligned}$$

De forma análoga, el conjunto de portafolios eficientes puede ser obtenido solucionando el problema dual:

$$\begin{aligned} \text{mín } \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times \sigma_{ij} \\ s.a. : E(r_p) &= R^* = cte \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ w_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Como puede observarse, éstos son modelos con una sola función objetivo. Por ello se modifican las expresiones anteriores y se obtiene un modelo multicriterio, que considera la optimización simultánea de dos funciones objetivo.

En la práctica es difícil cumplir la cuarta premisa del modelo de Markowitz (*es preferible un título o cartera con una mayor rentabilidad y un menor riesgo*). Para proseguir con el análisis es conveniente introducir el principio de dominación que analiza inversiones alternativas dentro de un mismo nivel de rendimiento o clase de riesgo. Así, entre inversiones que tienen el mismo rendimiento, el principio de dominación establece que es preferible aquélla con el menor riesgo; de la misma manera, para cada clase de riesgo es preferible la inversión con el mayor rendimiento (ver equivalencia con *Óptimo de Pareto* y la *Dominancia de Pareto* en la sección 1.5.2).

Por otra parte, el criterio para elegir entre combinaciones de instrumentos financieros en una cartera se basa en los planteamientos de Markowitz. Al asignar a más de un instrumento financiero un monto dado a invertir se abren múltiples combinaciones posibles tan sólo con dos de ellos, al variar las proporciones que se comprarían de cada uno. Generalmente encontraremos instrumentos financieros con mayores rendimientos, pero también caracterizados por un mayor riesgo y viceversa. En cuyo caso, la determinación de la combinación más deseable de riesgo y rendimiento dependería de las preferencias del inversionista por el rendimiento de su capital y también de su grado de aversión al riesgo. Sin embargo, cuando se combinan tres o más activos en una cartera se puede observar que para cada nivel de riesgo habrá dos o más combinaciones de instrumentos financieros que ofrecen distintos niveles de rendimiento. Markowitz llamó carteras eficientes a las que proporcionan los rendimientos esperados más altos para cada nivel de riesgo, o el menor grado de riesgo para cada rendimiento esperado (ver equivalencia con el *Conjunto de Óptimos de Pareto* y el *Frente de Pareto* en la sección 1.5.2).

En la figura 2.10, por ejemplo, la cartera N no es eficiente porque a ese mismo nivel de rendimiento hay otra cartera E_1 que tiene un menor riesgo; de manera semejante, para ese mismo nivel de riesgo que representa N hay otra cartera E_2 que produce un mayor rendimiento.

Cuando se grafica sobre un plano todas las carteras que es posible crear con un número dado de instrumentos financieros, teniendo en el eje X el riesgo o desviación estándar σ_p y en el eje Y al rendimiento esperado $E(r_p)$ de las mismas, se define una superficie que representa a dicho conjunto de carteras viables (que en la figura 2.10 es el área delimitada por la línea continua). Sin embargo, al inversionista solamente le interesará aquella cartera que es eficiente para cada nivel de riesgo; y lo mismo sucede para cada nivel de rendimiento esperado. Así, a la curva que delimita esa superficie en los niveles más altos

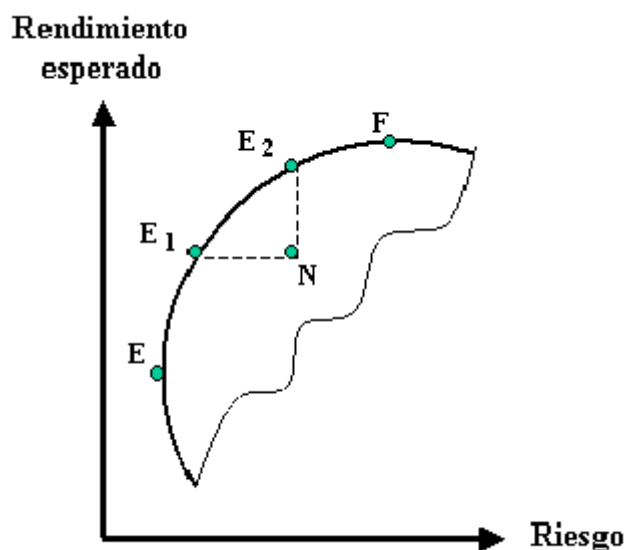


Fig. 2.10. Cartera eficiente, donde se maximiza el Rendimiento y se minimiza el Riesgo.

de rendimiento esperado y en los niveles más bajos de riesgo se le conoce como la *frontera eficiente*²¹ y representa al conjunto-eficiente de carteras. En la figura 2.10, es el segmento $E - F$ de la línea continua.

2.5.1 La cartera óptima

En términos de lo señalado para la elección de la combinación óptima de dos instrumentos financieros, el elegir entre las carteras del conjunto-eficiente, cada una de ellas con un amplio número de instrumentos financieros, involucra la actitud del inversionista ante el riesgo y el rendimiento.

En un plano con los mismos ejes citados como el de la figura 2.11 se puede graficar la función de intercambio riesgo-rendimiento de un inversionista. La ordenada al origen representará el rendimiento que ofrecen títulos de gobierno con riesgo técnicamente de cero. A partir de allí se encontrarán los rendimientos que ese inversionista exigiría para aceptar cada nivel creciente de riesgo, asignando primas por riesgo creciente. Un inversionista normalmente averso al riesgo exigiría incrementos más que proporcionales en rendimientos

²¹ Ver equivalencia con el *Frente de Pareto*.

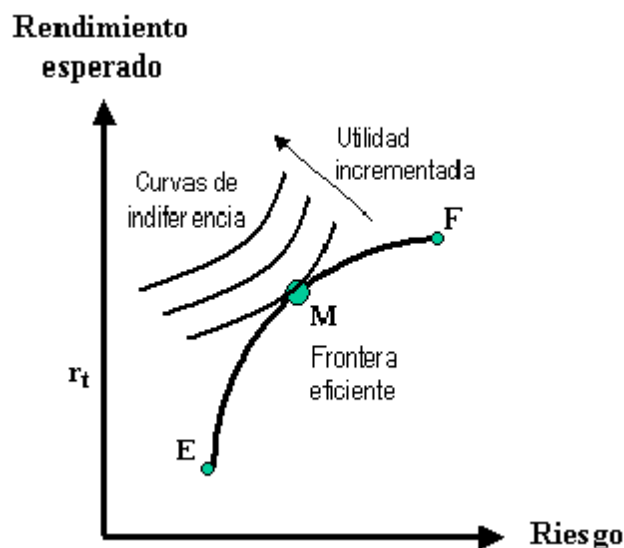


Fig. 2.11. Curvas de indiferencia y frontera eficiente.

para aceptar cada nivel sucesivo de riesgo, probablemente bajo una función exponencial de algún tipo. Estas curvas representan lo que se conoce como *curvas de indiferencia* riesgo-rendimiento para ese inversionista. Para todo inversionista las curvas de indiferencia con pendientes más pronunciadas representan una mayor aversión al riesgo y viceversa.

Esta característica de las curvas de indiferencia origina que cuando se les incorpora aquella gráfica en la que se trazó la frontera eficiente el punto de tangencia entre ésta y una de las curvas de indiferencia de un inversionista señala la cartera que es óptima para tal función de intercambio riesgo-rendimiento. Es decir, curvas con una pendiente menos pronunciada (que corresponden a una menor aversión al riesgo) tocarán a tal frontera eficiente en un punto más arriba y a la derecha señalando como óptima para ese inversionista una cartera con un mayor rendimiento y un mayor riesgo; mientras que curvas con una mayor inclinación (que indican una mayor aversión al riesgo) serán tangentes a la frontera eficiente en un punto más a la izquierda y abajo indicando como cartera óptima para ese conjunto de preferencias una cartera con menor rendimiento, pero con un riesgo menor.

Las alternativas para integrar una cartera no se limitan a los instrumentos financieros de renta variable. Muchos administradores de portafolios de inversión los configuran con una mezcla de acciones y bonos²².

²² Sin embargo, para los fines de este documento, el uso de bonos del gobierno como los CETES, simplifican

2.5.2 Teoría Moderna de Portafolio

Las ideas introducidas por Markowitz son ahora popularmente conocidas como Teoría Moderna de Portafolio (*Modern Portfolio Theory*: MPT). Un importante resultado de la investigación promovida por las ideas formalizadas por la MPT es que al día de hoy los profesionales de la inversión y los inversionistas son muy diferentes a aquellos de hace 50 años. No solamente son más sofisticados financieramente sino que, además están provistos de muchas más herramientas y conceptos. En su forma más simple, la MPT otorga una estructura para construir y seleccionar portafolios basada en el rendimiento esperado de las inversiones y el apetito al riesgo del inversionista. La MPT también se conoce como *Análisis de Media-Varianza*, introducida como una nueva terminología la cual es ahora la norma en el área de la administración de inversiones. Una revisión de las diferentes formas que ha adoptado la MPT se puede ver en Fabozzi [21].

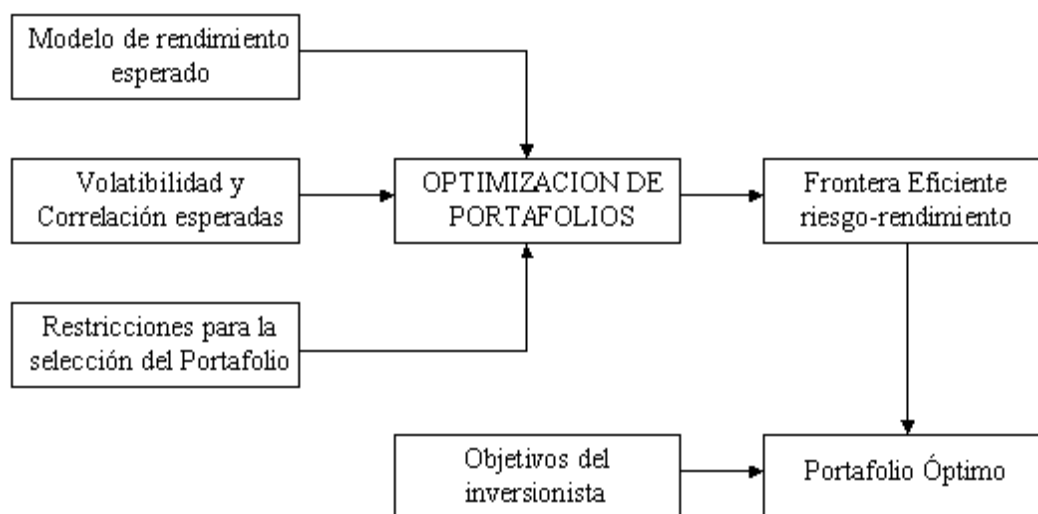


Fig. 2.12. Proceso de inversión MPT

Si bien, la teoría detrás del MPT es relativamente simple, su implementación puede ser bastante complicada. La teoría dicta que a partir de las estimaciones de los rendimientos, varianzas y correlaciones de un conjunto de inversiones y de las restricciones sobre

el problema del MV. Por lo que desde el punto de vista de las pruebas de desempeño de los AEMO que se implementan más adelante, no son un problema interesante.

opciones de inversión (p. ej., exposición máxima y restricciones en el volumen negociado)²³, es posible realizar una optimización que tiene como resultado la frontera eficiente riesgo/rendimiento o media-varianza²⁴.

Una de las aplicaciones más ampliamente utilizada de MPT es la asignación de instrumentos financieros. En ella por lo general los asesores financieros (*asset managers*, *financial advisors*) realizan su actividad comenzando por seleccionar un conjunto de instrumentos financieros. Para obtener los estimados de los rendimientos, varianzas y correlaciones, generalmente utilizan índices que representan el desempeño histórico de los instrumentos financieros²⁵. Estos estimados son utilizados como datos de entrada al modelo de optimización media-varianza que da como resultado la frontera eficiente. Entonces, aplicando algún criterio (p. ej., usando simulaciones de Monte Carlo para calcular las distribuciones del rendimiento de portafolios candidato) eligen un portafolio óptimo. Finalmente, este portafolio es implementado usando por ejemplo, administradoras de fondos (sociedades de inversión). Además, es bastante común que la estrategia de mezcla óptima de instrumentos financieros dentro de un portafolio, difiera significativamente entre los diferentes administradores de portafolios, pero todas estas alteraciones tienen una justificación teórica, que finalmente dirigen a cada una de ellas hacia el portafolio óptimo.

²³ Los practicantes de la optimización media-varianza comúnmente incorporan sus *creencias* acerca de la precisión de los estimados agregando, por ejemplo, restricciones acerca de la exposición máxima de un determinado activo dentro del portafolio. El tipo de instrumentos en los cuales estas restricciones son impuestas generalmente son aquéllos en los cuales el desempeño esperado es difícil de obtener, o es poco preciso.

²⁴ En la práctica, esto se realiza con la ayuda de algún paquete de software para la asignación de instrumentos financieros.

²⁵ No todas las administradoras de instrumentos financieros utilizan este método para obtener los estimados de los rendimientos esperados.

Capítulo 3

Revisión de literatura relacionada

A continuación se describen brevemente las referencias encontradas relativas al desarrollo de AE que se utilizaron para resolver el problema de la creación de portafolios de inversión con el enfoque multiobjetivo (MO). Al final se resumen las principales características, parámetros, ventajas y desventajas de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMO) utilizados para resolver el problema específico del modelo de media-varianza de Markowitz (MV)

3.1 Métodos basados en Pareto

Vedarajan et al. tratan la optimización de portafolios de inversión usando un AG y justifican el uso de los AEMO donde normalmente pudiera utilizarse el enfoque de la programación cuadrática (PrC); además añaden el costo de transacción (*transaction costs*) como una tercera función objetivo [65].

Vedarajan et al. plantean que para un portafolio de tamaño n , el conjunto de datos de entrada es $(2 \times n) + (n \times (n - 1)/2)$ (dado que $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, ver ecuación 2.15), por lo que si n es grande puede ser laborioso seguir la pista de todos los coeficientes de correlación, y se pueden generar problemas por restricciones de almacenamiento de memoria.

Proponen usar el AEMO conocido como NSGA [58] con dos y tres objetivos para encontrar simultáneamente puntos pertenecientes al conjunto de óptimos de Pareto. Para preservar la diversidad de la población aplican una función de compartición.

Para incorporar la restricción de la ecuación (2.20) utilizan un procedimiento de reparación para los individuos no factibles tomado de un artículo de Bean [2].

Vedarajan et al. enfatizan que para resolver el problema en la práctica, es necesario que la matriz de covarianzas sea totalmente positiva para poder aplicar la PrC. Si existen discrepancias numéricas (p. ej., imprecisión por redondeo y/o por la aritmética de punto flotante), esta suposición podría ser violada. Lo que es más, una violación no es improbable con los datos reales, particularmente cuando n es muy grande, dado que las covarianzas

son estimaciones a partir de series de tiempo de los precios de los instrumentos financieros reales, las cuales no necesariamente satisfacen las restricciones especificadas a priori por la herramienta matemática utilizada para el análisis del portafolio.

Vedarajan et al. plantean el MV original de Markowitz y le agregan una restricción:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : w_i \leq w_{\text{máx}} \quad \text{diversificación del portafolio} \quad (3.22)$$

donde: $w_{\text{máx}} \in \mathbb{R}_+$ es una constante.

La variante del MV donde el costo de transacción por cambios en el portafolio (*rebalanceo*) es un ingrediente adicional, causa problemas a la PrC, por lo que plantean una tercera función objetivo a ser minimizada:

$$f_{\text{cost}}(w) := \sum_{i=1}^n c_i \times (w_i - \tilde{w}_i)^2 \quad (3.23)$$

donde: $\tilde{w}_i \in \mathbb{R}_+^0$ es el peso inicial del instrumento financiero i en el portafolio que va a ser potencialmente cambiado debido a transacciones por rebalanceo, y la constante $c_i \in \mathbb{R}$ es el costo de transacción del instrumento financiero i .

Toda la frontera óptima se calcula en una sola ejecución del AG, lo que puede ofrecer una reducción significativa del tiempo computacional requerido en comparación con los métodos de PrC tradicionales.

Pérez et al. realizaron un estudio comparativo de varios AEMO en el problema de selección de portafolios con el MV [49].

Pérez et al. hacen la observación de que generalmente, la única diferencia entre las propuestas MO y otros AG radica en el cálculo de la función de aptitud y/o el operador de selección. La idea más simple consiste en tomar las funciones objetivo y convertirlas a un solo objetivo (usando una función agregativa). A pesar de ser el método más intuitivo, tiene ciertos inconvenientes los cuales restringen su uso a un pequeño número de problemas. El principal inconveniente de este enfoque es la pérdida de información sobre el rango de cada objetivo, ya que si la diferencia de pesos entre ellos es significativa, el mayor domina al resto.

La solución a través de combinaciones en los pesos de los objetivos utiliza la siguiente función objetivo:

$$\text{máx } \lambda \times \left[\sum_{i=1}^n w_i \times \mu_i \right] - (1 - \lambda) \times \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times \rho_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j \right] \quad (3.24)$$

donde: $0 \leq \lambda \leq 1$. Esto con la idea de asignar diferentes pesos a las funciones objetivo originales dentro de la función agregativa.

Por otro lado, el método de restricciones utiliza el siguiente modelo:

$$\text{mín } \sigma_p^2 \quad (3.25)$$

$$s.a. \mu_p \geq \mu_{\text{objetivo}} \quad (3.26)$$

En este caso, μ_{objetivo} representa el mínimo rendimiento que el portafolio puede tener para que la solución sea considerada aceptable.

Pérez et al. realizan una comparación de las técnicas NPGA [27] (*Niched Pareto Genetic Algorithms*), MOGA [24] (*MultiObjective Genetic Algorithms*) y NGGA [64] (*Non Generational Genetic Algorithm*) junto con el uso de un AG con una función agregativa.

En el caso de las combinaciones de pesos se realiza una enumeración a partir de $\lambda = 0$ y hasta alcanzar 1 utilizando incrementos de $\frac{1}{n}$. Y para el método de restricciones mono-objetivo se enumera μ_{objetivo} desde el valor mínimo de μ_i hasta el valor máximo de μ_i (sobre la base del beneficio deseado para el portafolio) con incrementos de $\frac{\text{máx}(\mu) - \text{mín}(\mu)}{n}$.

De las enumeraciones realizadas, para cada una de las cuales se aplicó el AG, se van obteniendo puntos del frente de Pareto. En este trabajo se concluye que el método NGGA es el más eficiente y efectivo para una conformación eficiente del frente en la selección de portafolios de inversión.

Lin et al. describen la implementación de un AEMO (usando un AG) para resolver el MV con costos de transacción fijos (*fixed transaction costs*) y lotes mínimos de compra-venta (*minimum transaction lots*) [36].

Lin et al. consideran que el MV es un problema de PrC con una matriz positivamente semidefinida (*positive semidefinite matrix*), el cual es solucionable en tiempo polinomial. Pero cuando se tiene en cuenta una situación práctica tal como los costos de transacción fijos y/o los lotes mínimos de compra-venta, la selección de portafolios se vuelve más complicada porque el modelo es un problema de programación matemática (PrM) con variables enteras-variadas y objetivos no lineales. Debido a esta complejidad, la técnica de PrM convexa no puede ser aplicada para resolver este problema.

El MV con costos de transacción fijos y lotes mínimos de compra-venta es un problema de programación con dos objetivos y se define así:

$$\text{mín}(-f_{\text{return}}(w), f_{\text{risk}}(w)) \quad (3.27)$$

s.a. :

$$C_0 \leq \sum_{j \in S} c_j \times w_j = C \leq C_1 \quad (3.28)$$

$$0 \leq c_j \times w_j \leq u_j \quad (3.29)$$

$$z_j \in \{0, 1\}$$

$$\forall j \in S$$

donde: $f_{\text{return}}(w)$ representa al rendimiento esperado y $f_{\text{risk}}(w)$ a la varianza o riesgo; el precio de mercado de una unidad del instrumento financiero j que puede ser comprada es c_j ; S es el conjunto de instrumentos financieros en los cuales el inversionista intenta invertir un capital C , y se supone que C está en el rango entre C_0 y C_1 (p. ej., entre la mínima y máxima cantidad de dinero disponible para la inversión). Por cada instrumento financiero $j \in S$ se impone un monto máximo de capital que puede ser invertido en él, denotado por u_j ; y z_j es una variable $\{0, 1\}$ que toma el valor de 1 si y sólo si $w_j > 0$.

Lin et al. sugieren un algoritmo híbrido para la aproximación de portafolios no-dominados factibles, el cual combina elementos del AE mono-objetivo GENOCOP (*Genetic algorithm for Numerical Optimization of COstrained Problems*) para reparar las soluciones no factibles, con el NSGA-II.

A partir de la evidencia empírica puntualiza que en el contexto del problema MV la restauración de la factibilidad a los individuos después de haberles aplicado los operadores genéticos, es esencial para mejorar la eficiencia del proceso de búsqueda evolutiva.

Mukerjee et al. [42] explican el uso del NSGA-II para implementar un modelo para la toma de decisiones multicriterio (por sus siglas en inglés MCDM: *Multicriteria Decision Making*) en la negociación del riesgo-rendimiento para un administrador de portafolios de créditos de un banco²⁶.

El administrador de un banco que opera bajo un ambiente competitivo, encara el objetivo común de maximizar la riqueza del accionista; específicamente, intenta maximizar el valor neto del banco, el cual a su vez involucra maximizar el margen del interés neto del

²⁶ Este es un problema diferente al problema original del MV de Markowitz.

banco (además de otros factores tales como los ingresos sin intereses). Al mismo tiempo, existen importantes restricciones regulatorias impuestas al banco, tales como un adecuado nivel de capitalización, exposición al riesgo por tipo de interés, etc. Por lo que el problema básico de la administración de créditos bancarios se define en términos de varios objetivos, como maximizar rendimiento y minimizar riesgo.

Mukerjee et al. [42] describen el NSGA-II y dos interpretaciones del modelo de negociación del riesgo-rendimiento. Si la toma de decisiones se realiza con respecto a las tasas de interés a ser cargadas para los préstamos según la categoría a la que pertenecen, entonces en el corto plazo la curva de demanda para los préstamos se considera inelástica. En este primer modelo, las variables de decisión para el administrador del portafolio son las asignaciones de los préstamos. Dadas N categorías de préstamos (AAA , BBB , etc.), con tasa de interés R_i ¿qué fracción de préstamos X_i deberá ser asignada en cada categoría? En este caso, maximizar el rendimiento es equivalente a maximizar el interés del ingreso, y el riesgo se asume que está correlacionado con la desviación estándar de los rendimientos del portafolio.

En el segundo modelo, la demanda de préstamos no es inelástica, y el total de solicitudes de préstamos recibidas en la categoría i se supone que tiene un límite superior el cual es una función negativamente inclinada de la tasa de interés R_i . Así el administrador de préstamos encara una curva de demanda inclinada negativamente para los préstamos, y necesita asignar X_i sujeto a esta restricción adicional. No obstante, es claro que si X_i está lejanamente por debajo del límite, entonces es más eficiente cargar al interés más alto R_i para la categoría i , tal que este rendimiento sea el más alto para la misma asignación X_i . Es más, con el incremento al acceso de la información y los activos móviles, y también con la asignación de precio a los préstamos basado en el riesgo por parte de los bancos, el usuario puede cada vez más preferir las fuentes de préstamos más baratas.

Mukerjee et al. realizan una comparación entre el NSGA-II y un AG que usa el método épsilon. Los resultados indican que el NSGA-II es computacionalmente más eficiente.

Schlottmann y Seese escriben acerca de las aplicaciones financieras de los AEMO, de su estado actual y de sus posibles tendencias en investigación futura [53].

Realiza una justificación acerca del porqué las aplicaciones financieras se clasifican dentro de los problemas NP²⁷ y del hecho de que casi todos los problemas con valor prác-

²⁷ La clase de problemas \mathbf{P} está formada por todos aquellos problemas de decisión para los cuales se tiene

tico y en específico los de finanzas, caen dentro de la clase de problemas NP-completos²⁸, debido a que tienen una estructura combinatoria la cual es equivalente (con respecto a las reducciones en tiempo polinomial) a dichos problemas NP-completos. Por ejemplo, la selección de portafolios es equivalente al conocido problema NP-completo del *Knapsack*²⁹.

En consecuencia, se requiere de algoritmos de aproximación que provean de soluciones suficientemente buenas y que consuman solamente recursos computacionales de orden polinomial, proporcionales al respectivo tamaño del problema (p. ej., el número de variables independientes). Sin embargo, algunas aplicaciones financieras requieren funciones no lineales y no convexas, y algunas veces sólo se conocen los datos pero no la dependencia funcional entre ellos. Esto justifica el enfoque heurístico, como el de los AEMO.

Se desarrolla el MV y se formula el siguiente problema mono-objetivo con restricciones obtenido de la literatura financiera. Dada una tasa de retorno r^* , encontrar un portafolio factible $w^* \in F$ (donde F son los portafolios factibles), tal que se satisfaga:

$$f_{return}(w^*) = r^* \wedge f_{risk}(w^*) = \min_{x \in F} \{f_{risk}(w)\} \quad (3.30)$$

Si no hay restricciones de integridad u otro tipo de restricciones, las cuales incrementen la complejidad, dichos problemas pueden ser resueltos utilizando algoritmos de PrC (bajo el supuesto de que la matriz de covarianzas es totalmente positiva). Desde el punto de vista de complejidad computacional lo anterior es equivalente a resolver un problema igual al Knapsack usando variables de decisión de valor real, tal que la función objetivo es no lineal.

En un AEMO se consideran las dos funciones objetivo por separado, y se puntualiza que la interrogante de encontrar los portafolios no-dominados puede fácilmente ser extendida a un problema multiperiodo donde la remuneración de cada punto futuro adicional en

un algoritmo de solución que se ejecuta en tiempo polinomial dentro de una máquina determinista.

Todos los problemas de decisión computables (verificables) en tiempo polinomial vía un algoritmo no determinístico constituyen la clase **NP**. Dicho de otro modo, no se ha encontrado un algoritmo determinista que lo resuelva en tiempo polinomial o si este existe, su tiempo de resolución es exponencial.

²⁸ La clase **NP-completo** es aquella formada por los problemas más difíciles dentro de la clase NP, y para probar si un problema pertenece a esa clase se requiere que algún problema NP-completo pueda transformarse a él.

La palabra **completo** significa que la solución de un problema de decisión NP, contiene, de alguna forma, la solución a todos los problemas de decisión de la clase NP.

Un problema pertenece a esta clase si todos los algoritmos requeridos para resolverlo requieren tiempo exponencial en el peor caso.

²⁹ Problema de la mochila, mejor conocido por el término en inglés: *knapsack problem*.

el tiempo t_2, t_3, \dots, t_m , $m \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, m\} : t_i \in \mathbb{R}$ es considerada por separado. Lo que resulta en $2 \times m$ funciones objetivo a ser optimizadas.

Schlottmann y Seese describen el MV y presentan una revisión de varias aplicaciones financieras de AEMO. Todas las propuestas discutidas incorporan conocimiento específico del problema (aparte de los elementos de un AEMO estándar) para lograr un algoritmo más poderoso comparado con la aplicación de un AEMO simple. Schlottmann y Seese recomiendan hibridizar los AEMO con otros algoritmos de búsqueda y métodos específicos del problema, ya que ambos enfoques, el multiobjetivo y el evolutivo, ofrecen un gran potencial para una hibridación exitosa.

Streichert et al. tratan el problema de selección (optimización) de Portafolios con Restricciones, implementando una extensión a la representación y, aplicando Lamarckismo y el efecto Baldwin [60] [59] [61].

En estos trabajos Streichert et al. consideran el MV con dos funciones objetivo y añaden restricciones a las inicialmente especificadas. Consideran a las ecuaciones (2.20) y (2.21) como restricciones suaves (*soft constraints*), y establecen como restricciones duras (*hard constraints*) las características que muchos inversionistas consideran, forman parte del ambiente financiero real de este problema³⁰.

- Las restricciones de Cardinalidad (*Cardinality Constraints*) restringen el número máximo de instrumentos financieros incluidos en el portafolio.

$$\sum_{i=1}^n \text{sign}(w_i) = k \quad (3.31)$$

- El Umbral de Compra (*Buy-in Threshold*) establece la cantidad mínima a ser comprada de un instrumento financiero, en caso de que éste deba incluirse en el portafolio.

$$w_i \geq l_i \quad \forall w_i > 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.32)$$

³⁰ Sin embargo, desde el punto de vista de la optimización evolutiva multiobjetivo se considera al *manejo de restricciones* como un problema diferente al planteamiento multiobjetivo de este documento.

Desde la perspectiva financiera, el manejo de restricciones provoca la pérdida de generalidad en el modelo, ya que normalmente los operadores de bolsa (*traders*) realizan primero el análisis fundamental, donde aplican su experiencia, y luego consideran la perspectiva ofrecida por el modelo de media-varianza y otros modelos (análisis técnico, análisis de mercado, arbitraje, índices, CAPM, etc.) para tomar sus decisiones de inversión. Para ello, requieren de la generalidad en el modelado, y de la respuesta expedita. Las restricciones son mas bien vistas como puntos de análisis sobre un conjunto de opciones.

- Las Unidades de compra-venta de Valores (*Roundlots*) indican los volúmenes mínimos c_i que pueden ser adquiridos para cada instrumento financiero³¹.

$$w_i = y_i \times c_i; \quad i = 1, \dots, n \quad \text{y } y_i \in \mathbb{Z} \quad (3.33)$$

Streichert et al. utilizan dos AEMO: el NSGA y una Estrategia Evolutiva (ES). En estos enfoques ensayan con representación binaria, código de gray y valor real, y añaden a cada representación una extensión adicional específica para este problema. Para mejorar los resultados, se incorpora búsqueda local a los AE (transformándolos a Algoritmos Meméticos) actualizando las variables de decisión, para que sea posible heredar sus características a la siguiente generación (*Lamarckismo*), o actualizando solamente los valores de aptitud (*fitness*) para cada individuo (*efecto Baldwin*); por una parte se dice que el Lamarckismo causa convergencia prematura, mientras que el efecto Baldwin por otro lado conduce a un espacio de búsqueda neutral, el cual permite a un algoritmo evolutivo escapar de óptimos locales.

La idea de utilizar una representación especial se basa en el hecho de que los portafolios que están sobre el frente de Pareto raramente integran a todos los instrumentos financieros disponibles, más bien se limitan a una selección de ellos, especialmente en el caso de las restricciones de cardinalidad. La composición de instrumentos financieros en el portafolio se parece al problema binario del Knapsack (*0-1 Knapsack problem*). Para eliminar y agregar fácilmente instrumentos financieros al portafolio, se asocia una máscara de bits binaria b_i a las variables de decisión w_i . Cada bit b_i determina cuando el instrumento financiero asociado será elemento del portafolio o no. Además, en lugar de castigar o rechazar a las soluciones no factibles, se aplica una heurística de búsqueda local para convertir una solución no factible a una factible. Para cumplir con las restricciones suaves se limita al rango establecido la representación de la solución, $w_i \in \{0, 1\}$, y se utiliza un proceso de estandarización $w'_i = w_i / \sum_{j=1}^N w_j$. En especial, para las restricciones de cardinalidad, antes de la estandarización se hacen cero todas las variables w_i , excepto las k variables de mayor valor. Los AE extendidos que utilizan la representación especial se nombran como *Knapsack Genetic Algorithm* (KGA) y *Knapsack Evolutionary Strategies* (KES).

La principal ventaja de los AE extendidos parece ser su habilidad para modificar fácilmente el contenido del portafolio. Similar efecto se logra si se utiliza la búsqueda local

³¹ La unidad normal de operación de un título (instrumento financiero) generalmente es de 100 acciones de capital o múltiplos de 100. Si se opera con menos de 100 acciones, se considera como *oddlot*.

con Lamarckismo. Con el Lamarckismo los instrumentos financieros eliminados por la búsqueda local causan que las variables de decisión involucradas sean puestas a cero. Por lo tanto, el vector resultante de las variables de decisión w_i estará disperso; y por ello los operadores de mutación y cruce pueden causar mayores cambios en el contenido del portafolio aplicándolos separadamente al vector w_i , como a la máscara de bits binaria b_i . Con esto, los AE estándar pueden moverse tan fácilmente a través del espacio de combinación de instrumentos financieros, como los AE extendidos. Los experimentos con el Lamarckismo apoyan este punto de vista.

Streichert et al. muestran en lo general que los AE extendidos con la representación adicional del Knapsack (KGA y KES) son capaces de resolver el problema de optimización de portafolios de forma más eficiente que los AE estándar, independientemente del esquema de codificación usado para el genotipo, debido a la capacidad mejorada de búsqueda con respecto a las posibles combinaciones de instrumentos financieros en el portafolio. Esto sigue siendo cierto cuando no hay restricción de cardinalidad. Especialmente con el incremento en la restricción de cardinalidad, la diferencia entre los AE estándar y los AE extendidos se hace cada vez más insignificante. Si bien las ejecuciones individuales de los AE extendidos encontraron soluciones razonablemente buenas, los resultados se consideraron poco fiables³².

Se mostró también la capacidad de producir el mismo efecto usando la búsqueda de la viabilidad Memética junto con el Lamarckismo. En este caso los AE estándar igualaron el desempeño de los AE extendidos.

Usando restricciones adicionales todos los AE no se desempeñaron tan bien como antes, con excepción de algunos casos de los AE extendidos. Nuevamente el Lamarckismo es capaz de mejorar los AE y los resultados se vuelven más fiables. Con el Lamarckismo los KES son solamente un poco peores que el caso sin restricciones. Los experimentos indican que la representación discreta para el KGA se desempeña mucho mejor en el caso de las restricciones de unidades de compra-venta de valores (*roundlot*) y producen también buenos resultados. Con el Lamarckismo es más fácil para la mutación eliminar los instrumentos financieros sobrantes del portafolio, lo que genera vectores dispersos formados por buenos instrumentos financieros, y permite a la cruce buscar combinaciones de instrumentos financieros efectivos, en lugar de permutar entre todos los instrumentos financieros existentes, lo cual incrementa notablemente la velocidad de convergencia. También se ex-

³² Streichert et al no indican en qué sentido se debe entender esta *fiabilidad*.

perimentó utilizando tres tipos de cruza: discreta, intermedia y $BLX-\alpha$; obteniéndose resultados muy similares.

Varias heurísticas han sido aplicadas para resolver el problema de la optimización de portafolios (Recocido Simulado, Búsqueda Tabú, AG), pero de ello se puede hacer notar que ninguna heurística en lo individual se desempeña mejor que las otras y que solamente el resultado conjunto de tales heurísticas produce un frente de Pareto satisfactorio³³.

Fieldsend et al. muestran modelos de Pareto con regresión no lineal multiobjetivo asistidos por el pronóstico de series de tiempo (*forecasting*) como una analogía del Modelo de Valuación de los Activos de Capital (por sus siglas en inglés CAPM) [23] y, de la optimización de portafolios con restricciones de cardinalidad [22]. La implementación busca generar el mayor número de puntos estimados sobre el Frente de Pareto con restricciones de cardinalidad.

Fieldsend et al. en su primer estudio, construyen una población de óptimos de Pareto generados por modelos de regresión con Redes Neuronales (por sus siglas en inglés *Neural Networks*: NN) para describir el proceso de generación de mercado en relación con el pronóstico de su riesgo y rendimiento. No obstante, cuando se mide el desempeño de tales predictores financieros, los analistas financieros frecuentemente usan un rango completo de diferentes medidores de error (al menos se conocen 15 de ellos), cada uno de los cuales se puede ver como una función objetivo para este problema. Dado que la superficie de error definida por el proceso de pronóstico no es conocida, se requiere de una nueva propuesta para implementar el entrenamiento multiobjetivo de NN; siendo estos métodos más bien de reciente creación. Se utiliza el AEMO llamado E-SPEA (*Extended Strength Pareto Evolutionary Algorithm*) con datos reales en el dominio del pronóstico de series de tiempo. Además, por analogía con el CAPM se demuestra que mediante la generación de un conjunto de modelos de Pareto, con respecto al riesgo y rendimiento esperados, el analista puede tener acceso a altas tasas de retorno (para un nivel dado de riesgo) mediante la diversificación de su riqueza entre pronósticos basados en el arbitraje e inversiones libres de riesgo. Se plantea la minimización de una función objetivo dependiente de D funciones de medición de error, sin indicar mayores detalles al respecto.

En realidad Fieldsend et al. utilizan una definición como la de Markowitz de las funciones objetivo de riesgo y rendimiento, y buscan un frente de Pareto de modelos de

³³ Streichert et al. hacen referencia a un documento de trabajo de Crama [11] donde se llega a la conclusión planteada.

regresión no lineal, en vez de buscar un mercado de capitales equilibrado (*capital market equilibrium*) como establece el CAPM.

Fieldsend et al. en su segundo estudio, establecen que la PrC normal utilizada para la optimización de portafolios es difícil de implementar cuando existen restricciones de cardinalidad. Aún usando heurísticas, esto puede ser computacionalmente costoso cuando el analista no conoce *a priori* exactamente cuántos k instrumentos financieros desea formar el portafolio, o qué nivel de riesgo-rendimiento desea afrontar sin tener que recurrir a analizar la frontera actual de transacción entre el riesgo y rendimiento (*trade-off frontier*). Este estudio propone una solución paralela al problema, mediante la extensión de técnicas desarrolladas a una $EE (1 + 1)$, con lo que se puede encontrar un conjunto de portafolios representando estimados de todas las posibles fronteras de restricciones de cardinalidad, mediante un solo proceso de búsqueda, para un rango de tamaños de portafolios y restricciones. Se incorporan nuevos procesos de búsqueda en este AE para permitir mantener estos conjuntos de fronteras dispares y comparar de forma eficiente nuevos portafolios durante el proceso de búsqueda (lo que se hace variando k y w , y aplicando no-dominancia de Pareto a los resultados de un proceso iterativo sobre k).

Cuando no existen restricciones de cardinalidad, puede usarse la PrC en forma efectiva para determinar los pesos de un portafolio óptimo, dados n diferentes instrumentos financieros. Si bien, cuando se imponen restricciones de cardinalidad reales, esta PrC no puede ser aplicada para encontrar subconjuntos óptimos.

Si no se utilizan otras restricciones además de la cardinalidad, entonces ésta puede ser incorporada como un tercer objetivo a ser minimizado, por lo tanto encontraríamos la superficie de 3-dimensiones que equilibra (*trade-off*) el riesgo, rendimiento y la minimización de la cardinalidad. Los resultados empíricos muestran que con una evaluación posterior (*ex post*) utilizando un nivel de cardinalidad relativamente pequeño, se puede lograr un desempeño que no es significativamente diferente a la frontera sin restricciones y, que con una evaluación previa (*ex ante*) hay algún nivel de persistencia en los pesos del portafolio encontrado.

Doerner et al. proponen una meta-heurística para la optimización combinatoria multiobjetivo, llamada Optimización de Pareto utilizando Colonias de Hormigas (*Pareto Ant Colony Optimization: P-ACO*) para resolver el problema de selección de portafolios y compara su desempeño con PSA (*Pareto Simulated Annealing*) y NSGA [17]. La implementación no se basa en el MV y utiliza una función de beneficio multiobjetivo.

Doerner et al. consideran que en la mayoría de las situaciones reales, las decisiones son tomadas en la presencia de múltiples objetivos en conflicto, además de que muchos de éstos son problemas combinatorios también. El enfoque consiste en aceptar diferentes criterios dentro del modelo y (parcialmente) determinar los candidatos eficientes del portafolio (no-dominados u óptimos de Pareto). Después de esta fase inicial, se le da la oportunidad al tomador de decisiones de explorar el espacio de soluciones sobre la base de la orientación provista por un procedimiento interactivo que involucra conjuntos de alternativas que son provistas explícitamente. La exploración continúa hasta que es encontrado un portafolio satisfactorio. Normalmente, esta propuesta puede ser emprendida sin considerar información alguna de preferencias a priori.

Cuando los tomadores de decisiones son confrontados con una gran cantidad de proyectos en competencia, las propuestas heurísticas proveen una negociación entre la calidad del espacio de soluciones y el esfuerzo computacional requerido para alcanzar esta aproximación. Por lo tanto, usan una población única asignándole a cada hormiga un peso diferente generado aleatoriamente. La creciente complejidad en la estructura del problema requiere adicionalmente de una herramienta para administrar los numerosos (hasta varios miles) potenciales portafolios eficientes en un tiempo computacionalmente razonable; para tal propósito se diseñó un *quad tree* generalizado para la implementación de la ACO. Además, se usa una estrategia de feromonas diferente, la cual se ajusta mejor en presencia de una alta complejidad.

En contraste con la adaptabilidad de los AG, el Recocido Simulado y la Búsqueda Tabú, P-ACO construye sus portafolios. Así, en gran parte evita portafolios candidato infactibles tomando explícitamente en consideración incluso interacciones de proyectos complejos. El enfoque de la Colonia de Hormigas imita el comportamiento mostrado por hormigas reales cuando están en búsqueda de comida. Las hormigas se comunican información acerca de las fuentes de alimento vía la cantidad de una sustancia aromática llamada *feromona*, la cual es secretada por las hormigas a largo de donde ellas transitan. Al transcurrir el tiempo, las trayectorias cortas y directas que apuntan desde el nido hasta la fuente de alimento habrán sido más frecuentadas que los caminos largos. Como resultado, las trayectorias directas son marcadas con más feromona, lo cual atraerá igualmente a un mayor número de hormigas para seguir tales rutas cortas, y provocar que la correspondiente senda de feromona se incremente rápidamente.

Las heurísticas implementadas, incluyendo la estrategia NSGA, son utilizadas para generar portafolios factibles considerando B beneficios, T periodos de planeación y R

categorías de recursos, usando para ello una *función de beneficio* así definida. En general, el desempeño del NSGA es significativamente peor con respecto a las otras heurísticas, ya que el NSGA propone relativamente pocos portafolios, y muchos de éstos son infactibles debido a la gran cantidad de restricciones.

3.2 Métodos no basados en Pareto

Shoaf y Foster proponen una representación de solución indirecta para el problema de conjuntos eficientes del MV, la cual permite las posiciones en corto y en largo³⁴ [55] [56]. La implementación utiliza una función mono-objetivo transformada.

Shoaf y Foster mencionan que solucionar el MV usando técnicas tradicionales de PrM depende de que se tenga un espacio de solución unimodal, lo cual involucra transformar la ecuación de mínima varianza (ver nota de pie de página 20 acerca del MV en la sección 2.5) usando multiplicadores de Lagrange. Para la minimización, la derivada parcial de cada variable es calculada e igualada a cero, lo que forma un conjunto de ecuaciones simultáneas lineales las cuales pueden ser resueltas por coeficientes de asignación para el portafolio de mínima varianza. Esto requiere de una tasa de rendimiento establecida como un objetivo fijo y que se proporciona como una restricción (parámetro inicial), sin la cual, el problema se hace multimodal.

En su trabajo de 1996 Shoaf y Foster indican haber creado el MMGA (*Markowitz Model Genetic Algorithm*) resultado de la combinación de GALOPPS (*Genetic Algorithm Optimized for Portability and Parallelism*) y SGA-C (*C-language implementation of a Simple Genetic Algorithm*). La función objetivo es una función agregativa transformada que permite seleccionar el balance deseado entre riesgo y rendimiento usando constantes ajustables. Las pruebas involucraron a 5 instrumentos financieros. El MMGA tuvo el potencial de proveer una solución con un riesgo similar o menor con respecto a la solución tradicional, pero con una mayor tasa de rendimiento esperado.

³⁴ La asignación de una cantidad fija de recursos entre un conjunto dado de instrumentos reúne el siguiente requerimiento: $1 = \sum_{i=1}^n x_i$, donde x_i es la proporción de recursos asignados del instrumento i . La asignación x_i puede ser positiva lo que representa una posición larga, o negativa representando una posición corta.

Ver el contraste con respecto al MV tradicional donde x_i no puede tener valores negativos.

El AG de conjunto-eficiente (*efficient set GA*) propuesto por Shoaf y Foster en 1996 [55] y 1998 [56], usa un estilo de representación indirecta que le permite evitar la producción de soluciones infactibles y el uso de funciones de penalización. Considera que el uso de una representación directa para cada miembro de la población de un AG, no trabaja bien en la asignación de recursos para el problema del conjunto-eficiente con restricciones de igualdad, ya que este tipo de representación lleva predominantemente a soluciones infactibles en cada generación. Además, las funciones de penalización, que trabajan bien limitando soluciones infactibles para problemas con restricciones de desigualdad, no son efectivas aquí.

Shoaf y Foster consideran que una modificación natural para mejorar la eficiencia es el uso de un modelo de *demes* o esquema paralelo (ver sección 1.1.3), donde varias subpoblaciones evolucionan independientemente con un cierto grado de migración entre ellas. Las estadísticas resultantes reflejan que el modelo de *demes* tiene el potencial para producir resultados comparables y mejores que una sola población de un AG, para igual cantidad de tiempo.

La representación de solución indirecta se caracteriza por la epístasis (ver sección 1.1.3) que provoca el cambio en un índice, pues este cambio afecta a otros índices dentro del mismo individuo, lo que es considerado una ventaja desde el punto de vista de la diversidad, aunque es contraria al principio de los bloques constructores (*meaningful building blocks*) de Goldberg, el cual afirma que en la representación de una solución los esquemas cortos de bajo-orden deberán estar relativamente no-relacionados.

Los experimentos confirmaron que la complejidad del tiempo esperado del AG es menor que el correspondiente para la PrC, para portafolios de hasta 100 instrumentos financieros. Además, la complejidad del AG puede ser atribuida primeramente a la función objetivo, la cual produce una asignación de portafolios a través de una representación de la solución en forma indirecta. El uso de los *demes* junto con un escalamiento exponencial de la aptitud, amplió el periodo de mejoría de las soluciones activas del AG.

Ehrgott et al. proponen un modelo para la toma de decisiones multicriterio para la optimización de portafolios [18], donde la solución es un AG implementado usando una función agregativa.

En este trabajo se usan cinco funciones objetivo específicas relacionadas con el riesgo y rendimiento y se consideran las preferencias individuales a través de funciones de utilidad específicas y una función de utilidad global aditiva.

Ehrgott et al. describen el MV y reemplazan la minimización de la varianza en la ecuación (2.19) por el equivalente de maximización de la varianza negativa, usando la equivalencia: $\min w^T \sigma w = -\max(-w^T \sigma w)$. Se hace notar que el primer objetivo de maximización del rendimiento de la ecuación (2.18) es una función lineal, mientras que el segundo objetivo $f_2(w) = -w^T \sigma w$ es una función cuadrática de w .

Actualmente, las críticas al modelo básico propuesto por Markowitz [37] [38] en 1959, se han incrementado debido a que no considera las preferencias individuales de los inversionistas. Ehrgott et al. hacen notar que la mayoría de los inversionistas en realidad no adquieren portafolios eficientes, sino más bien aquellos detrás de la frontera eficiente. Esta observación puede ser explicada por el hecho de que no toda la información relevante para una decisión de inversión puede ser captada en términos de riesgo y rendimiento; así un portafolio malo, desde este punto de vista, puede ser bueno al considerar otras restricciones adicionales. Como resultado, un modelo multicriterio basado en más de dos funciones objetivo permite una mayor flexibilidad en el modelado de los objetivos del inversionista, y combinado con una propuesta apropiada para la utilidad, conduce a mejores representaciones de sus preferencias.

Por esto, la función objetivo del rendimiento esperado en el MV es desglosada en rendimiento de los últimos 12 meses, rendimiento de los últimos 3 años, y dividendos anuales para el rendimiento; los primeros dos objetivos miden el cambio relativo del precio de los instrumentos financieros para el periodo especificado en el corto plazo, el tercer objetivo representa el dividendo anual relativo del portafolio. El cuarto objetivo, la clasificación estrella de Standard and Poor's (*S&P star ranking*) describe hasta qué punto un fondo de inversión se asemeja a un índice de mercado específico³⁵. El quinto objetivo, la volatilidad del portafolio puede ser establecida como la raíz cuadrada de su varianza que está dada por $w^T \sigma w$, y esto depende de la longitud de las series de tiempo subyacentes a cada periodo especificado.

Con el fin de considerar las 5 funciones objetivo se establecen cada una de ellas en lo particular y se define una función de utilidad global aditiva, empero, la relevancia del análisis que Ehrgott et al. desarrollan acerca de la teoría de utilidad multiatributo, está en la complejidad para obtener una sola función que cumpla con atributos como de ser completa (*completeness*), operacional, descomponible, no-redundante, y mínima; además de que

³⁵ Sólo aplicable cuando el portafolio consiste exclusivamente de *fondos de inversión*.

varios métodos de interpolación pueden ser aplicados y se requiere la diferenciabilidad de tal función.

Entre los métodos de solución utilizados se menciona un AG, sin indicar mayor detalle del AG ni de su implementación o parámetros utilizados en los operadores genéticos. Se realizaron cuatro pruebas, con 190, 40, 1416 y 1516 instrumentos financieros no dominados. Se debe hacer notar que las matrices de covarianzas se calcularon con valores aleatorios, excepto para el caso de 40 instrumentos financieros.

3.3 Comentarios

Existen diferentes métodos de PrM disponibles para resolver el MV, pero con ciertas desventajas. Como indican Streichert et al., varias heurísticas han sido aplicadas para resolver el problema del MV (p. ej., Recocido Simulado, Búsqueda Tabú, AE, etc.) las cuales muestran ventajas sobre la PrM, pero se observa que ninguna heurística en lo individual se desempeña mejor que las otras, y que solamente el resultado conjunto de tales métodos, heurísticos y matemáticos, produce un frente de Pareto satisfactorio.

Son pocos los trabajos en los que usando técnicas evolutivas multiobjetivo se aborda la creación de portafolios de inversión y sólo en algunos casos se proporciona información detallada de la implementación, de la técnica utilizada y sus alcances.

La aplicación puede incluir varios objetivos y restricciones, lo que lleva a interpretar matemáticamente a estos últimos de diferentes formas, así como a representar a los individuos para los AE con diversas estructuras.

Se observa que los AE no necesariamente aplican criterios multiobjetivo para resolver el MV, si bien han mostrado ser útiles para la optimización multiobjetivo con el uso de funciones agregativas.

En las referencias revisadas no se indica qué proporción del frente de Pareto se cubre con las soluciones de los AE. Solamente en el trabajo de Streichert et al. se utiliza la Δ_{area} , definida a partir de la *métrica* — S establecida por E. Zitzler en 1999 [67].

En los trabajos revisados se aplican variantes del MV como: manejo de ventas en corto, administración de portafolios de préstamos o créditos, administración de portafolios eficientes, aplicación del enfoque del MCDM.

Es de llamar la atención la correspondencia del MV con el problema de la mochila o *Knapsack*, ya que cuando este punto de vista es considerado, los resultados tienen una mejor

convergencia. El uso de *Lamarckismo* en el mismo sentido ayuda a promover un mayor número de soluciones factibles sin tener que esperar a que la evolución de las soluciones lleve a mejores puntos sobre el frente de Pareto.

La consideración de restricciones y de varias funciones objetivo lleva a soluciones más reales que, a pesar de ello, pueden disminuir la flexibilidad del usuario para aplicar su propio punto de vista y experiencia sobre soluciones más generales.

Por otro lado el manejo de paralelismo, por ejemplo usando *demes*, permite generar soluciones con un alto grado de independencia y en forma simultánea.

En los documentos revisados solamente los AE de 2^a generación: NSGA-II, SPEA y variantes de ES, han sido aplicados a la solución del MV; y son pocas las comparaciones de desempeño realizadas entre ellos.

Para aquellos trabajos directamente relacionados con el MV y la optimización evolutiva multiobjetivo, se resumen en las tablas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, y 3.6 sus principales características, parámetros y, sus Ventajas y Desventajas (utilizando un criterio uniforme de comparación, el cual es una interpretación libre de aquello que mejora el desempeño de los AE) ³⁶.

En la sección 4.3 se analizan las referencias aquí revisadas, y se toman de dichos trabajos los elementos que justifican la propuesta desarrollada en este trabajo de tesis.

³⁶ Dentro de las tablas, los *bits* hacen referencia a la representación por *gene*, los cuales multiplicados por el número de *instrumentos* dan el tamaño del cromosoma o individuo.

Solamente se indican las funciones objetivo diferentes a las de *riesgo* y *rendimiento*.

Se utilizan las siguientes abreviaturas:

<i>comp.otros</i> : comparación con otros	<i>instr.fin</i> : instrumentos financieros	P_m : porcentaje de mutación
<i>func.obj</i> : funciones objetivo	P_c : porcentaje de cruza	<i>restr</i> : restricciones

Vedarajan et al.	1997
problema	variación MV Vshaped
AE	NSGA
representación	binaria 10 bits
evaluaciones	100
población	$1000_{2_func_obj}$ $1500_{3_func_obj}$
funciones objetivo	2, 3 (costos de transacción)
instrumentos financieros	5
información	ene91-dic95
P_c	0.9 un punto
P_m	0.01 uniforme
σ_{share}	0.1
selección	por torneo binario
métrica resultados	historia de la convergencia
Ventajas	func.obj>2
Desventajas	AE de 1ª gen, comp.otros.AE: NO, instr.fin<20, restr=NO

Tabla 3.1. Parámetros y características utilizadas por Vedarajan *et al.* [65]

Pérez et al.	2000
AE	NPGA, MOGA, NGGA
problema	MV
representación	binaria, 7 bits
evaluaciones	150
población	70
funciones objetivo	2
instrumentos financieros	35
información	IBEX-35 1996-1999 semanal
P_c	0.75 dos puntos
P_m	0.5
selección	por torneo, con subconjunto de comparación = 10
métrica resultados	prueba de Student, historia de la convergencia
experimentos	30
tiempo de ejecución	6-38 min
Ventajas	comp.otros.AE: SI, instr.fin>20
Desventajas	AE de 1ª gen, func.obj=2, restr=NO

Tabla 3.2. Parámetros y características utilizadas por Pérez *et al.* [49]

Lin et al.	2001
AE	NSGA-II + GENOCOP
problema	variación MV
representación	entera
evaluaciones	100, 1500, 3000
población	200
funciones objetivo	2
instrumentos financieros	31
información	mar92-sep97 Hang Seng index (de OR-Library) semanal
restricciones	2: costos de transacción, lotes mínimos de transacción
P_c	$(0.95_{inicial} \ 0.4_{siguientes}) \ SBX_{revisada}$
P_m	$(\frac{1}{bits \ del \ cromosoma})_{inicial} \ 0.2_{siguientes}$
selección	por torneo
Ventajas	AE de 2ª gen, instr.fin>20, restr: SI
Desventajas	comp.otros.AE: NO, func.obj=2

Tabla 3.3. Parámetros y características utilizadas por Lin *et al.* [36]

Mukerjee et al.	2002
AE	NSGA-II
problema	variación MV = MCDM
representación	binaria, 7 bits
evaluaciones	100
población	30, 60, 120
funciones objetivo	2
instrumentos financieros	7
información	CreditMetrics (en JP-Morgan97)
P_c	0.9
P_m	$(\frac{1}{bits \ del \ cromosoma}) = 0.02$
selección	por torneo binario
Ventajas	AE de 2ª gen
Desventajas	comp.otros.AE: NO, func.obj=2, instr.fin<20, restr=NO

Tabla 3.4. Parámetros y características utilizadas por Mukerjee *et al.* [42]

Streichert et al.	2004, 2003
AE	Algoritmos Meméticos = (NSGA, ES) + Lamarckismo
problema	MV
representación	binaria, gray: 7 y 32 bits; real; extendidas con Knapsack
evaluaciones	10^4
población	500
funciones objetivo	2
instrumentos financieros	31
información	Hang Seng (en Beasley96)
restricciones	3: cardinalidad, umbral de compra, unidades de compra-venta
P_c	$1.0_{bin_GA}, 0.5_{real_ES}$; tres puntos
P_m	$(0.1, 0.01)_{bin_GA}, 1.0_{real_ES}$; uniforme
σ_{share}	0.01
selección	por torneo, con tamaño de grupo 8
archivo externo	250 individuos
métrica resultados	S-metric Δ_{area}
experimentos	50
Ventajas	comp.otros.AE: SI, instr.fin>20, Lamarckismo: SI, restr: SI
Desventajas	AE de 1ª gen, func.obj=2

Tabla 3.5. Parámetros y características utilizadas por Streichert *et al.* [60] [59] [61]

Fieldsend et al.	2004	2002
AE	SPEA (1+1)-ES	E-SPEA + ANN
problema	variación MV	variación MV
evaluaciones	10^7	2000
funciones objetivo	2	2
información	ene92-dic03 (de US S&P 100 index y EM stock) 500 semanas	28feb86-3ene00 (de US DJIA) 2500 días valores apertura, mayor, menor y cierre
restricciones	cardinalidad	
P_c		0.8 un punto
P_m		0.1
selección	por torneo binario	por torneo binario
métrica resultados	comparación con frontera eficiente sin restricciones creada usando PrC	área de error de Pareto
experimentos	1000	25
Ventajas	AE de 2ª gen, restr=SI	AE de 2ª gen
Desventajas	comp.otros.AE: NO, func.obj=2	comp.otros.AE: NO, func.obj=2, restr=NO

Tabla 3.6. Parámetros y características utilizadas por Fieldsend *et al.* [23] [22]

Capítulo 4

Metodología y desarrollo

4.1 El problema a resolver y su solución

El problema del MV tiene características propias tanto en su definición como en su solución, parte de supuestos que generalizan el problema y permiten el modelado matemático, a partir de los cuales se establecen los requerimientos para obtener buenas soluciones. Con estos elementos se establecieron los objetivos de la tesis y el método de trabajo desarrollado.

4.1.1 Características del problema y la solución

El problema del conjunto-eficiente del MV es un *problema de optimización multicriterio* (POM), el cual puede ser abordado utilizando el modelo de Análisis de Riesgo-Beneficio creado por Markowitz (MV), y se caracteriza por lo siguiente:

- La variedad de alternativas de los instrumentos de inversión³⁷, y los porcentajes de inversión a ser asignados a cada uno de ellos, promueven que el espacio de búsqueda formado por sus posibles combinaciones crezca en forma exponencial [7].
- El MV básico es un problema de optimización cuadrática, para el cual existen algoritmos computacionalmente efectivos, pero que se restringen a considerar un objetivo y plantear el otro objetivo (u objetivos) como una restricción, o mediante la definición de una función lineal que incluye varios objetivos, utilizando para ello pesos o ponderaciones de la importancia de los objetivos, lo que implica experimentar con diferentes asignaciones de pesos [18] [36].

Desgraciadamente, al incluir restricciones ya no es viable la solución cuadrática. Además, se puede requerir del manejo de otras restricciones, lo que aumenta con-

³⁷ Mercado de capitales, mercado de deuda, etc.

siderablemente la complejidad del modelo, ya que las restricciones pueden volver un problema originalmente continuo en uno discreto [59].

- Las técnicas de programación matemática (PrM) son susceptibles a la forma y continuidad del frente de Pareto, lo que limita su aplicabilidad.
- Para los problemas de optimización llamados de Programación Lineal existen métodos de solución como el Simplex; para los de Programación No Lineal (como es nuestro caso) se requiere normalmente que la función objetivo sea diferenciable; y en general no se conoce ningún algoritmo que permita encontrar la solución óptima para este problema (o sea el problema general de programación no lineal) en tiempo polinomial [42] [7] [41].
- Las técnicas de PrM suelen generar sólo una solución por cada ejecución (p. ej., peso de los objetivos, funciones de distancia, formulación min-max, método de restricciones o negociación, etc.) [49] [42].
- El software comercial que implementa soluciones para el MV padece de muchas de las características aquí planteadas, lo que motiva el uso de heurísticas para su solución [41].

4.1.2 Supuestos del MV

La determinación de una *buena solución* al POM del MV contempla proponer al inversionista un conjunto de soluciones, pues en el MV se trabaja con supuestos como los siguientes [26] [38]:

- No existen costos de transacción adicionales por la compra y venta de los instrumentos financieros, o por la modificación de la estructura de un portafolio (*rebalancing*³⁸).
- El mercado tiene la disponibilidad de los instrumentos financieros en todo momento.

³⁸ Ver el trabajo de Vedarajan et al [65] en la sección 3.

- No está pre-establecido un límite de *volumen* mínimo o máximo de unidades a comprar o vender de un instrumento financiero (p. ej., *unidades de compra-venta de valores*³⁹).
- No está pre-establecido un límite de *compra (o venta)* mínimo o máximo para la cantidad de instrumentos financieros a comprar (o vender) (p. ej., *umbral de compra*⁴⁰).
- No está pre-establecido un límite del *número* mínimo o máximo de instrumentos financieros a incluir en el portafolio (p. ej., *restricciones de cardinalidad*⁴¹).
- Se pueden comprar o vender los instrumentos financieros en cantidades fraccionarias.
- No existen reglas de operación entre los instrumentos financieros, es decir que al comprar el instrumento financiero x no hay regla que diga que se debe adquirir también el y , o que al comprar el instrumento financiero x no se puede adquirir también el y .
- No se permiten ventas en corto.

4.1.3 Requerimientos

La decisión para preferir un portafolio de inversión desde el punto de vista del MV, se basa en los siguientes *requerimientos*:

1. Dado un conjunto de instrumentos financieros mostrar un panorama de las combinaciones de riesgo y rendimiento posibles [22].
2. Dado un nivel de riesgo, obtener el máximo rendimiento (o su contraparte, dado un nivel de rendimiento obtener el menor riesgo) [38].

³⁹ Ver el trabajo de Streichert et al. [60] [59] [61] y el de Lin et al. [36] en la sección 3.

⁴⁰ Ver el trabajo de Streichert et al. [60] [59] [61] y el de Lin et al. [36] en la sección 3.

⁴¹ Ver el trabajo de Streichert et al. [60] [59] [61] y el de Fieldsend et al. [23] [22] en la sección 3.

3. Dado un nivel de riesgo y rendimiento, tener disponible un conjunto de diferentes estructuras de distribución de la cartera, o sea soluciones que estando integradas por *diferentes combinaciones de instrumentos financieros* generen *el mismo riesgo y rendimiento* (independientemente de los pesos asignados a cada instrumento financiero)⁴².

Estos requerimientos son independientes a la necesidad de implementar otras funciones objetivo, además del riesgo y rendimiento, y de otras restricciones además de las propias del MV (*no ventas en corto y utilización de todos los recursos*).

Desde la perspectiva financiera, normalmente los operadores de bolsa (*traders*) realizan primero el análisis fundamental, donde aplican su conocimiento de la información financiera de las emisoras y luego consideran la perspectiva ofrecida por el modelo de media-varianza y otros modelos (análisis técnico, análisis de mercado, arbitraje, índices, CAPM, etc.) para tomar sus decisiones de inversión en base a su experiencia. Para ello, requieren de la generalidad en el modelado, y de la respuesta expedita.

Esto hace difícil de implementar alguna solución específica en la realidad, ya que independientemente de que se cumpla con los niveles de aversión al riesgo del inversionista y sus expectativas de rendimiento, se requiere de un conjunto de soluciones a evaluar en el mercado real (con respecto a los supuestos arriba mencionados), y sobre la base de su factibilidad y fácil implementación elegir aquella más adecuada al entorno financiero existente.

4.1.4 Soluciones disponibles

Las técnicas que actualmente están en uso para solucionar el MV incluyen a la programación cuadrática (PrC) [18] [25] [39] [41] [7] y técnicas de Monte Carlo [32] [40]. Otras técnicas, las cuales se relacionan con la PrC como una primera etapa para determinar el rango del conjunto-eficiente de soluciones, incluyen la programación por objetivos [7], programación dinámica [19] [51] y sistemas expertos [63] para el análisis de portafolios.

⁴² En este sentido, dos portafolios integrados cada uno de ellos, por la combinación de los mismos instrumentos financieros, pero con variaciones en sus pesos, y que generan el mismo nivel de riesgo y rendimiento, se consideran con la misma estructura.

En cambio, dos portafolios integrados cada uno de ellos, por una combinación diferente de instrumentos financieros (independientemente de las variaciones en sus pesos), y que generan el mismo nivel de riesgo y rendimiento, se consideran con diferente estructura.

Además, el conjunto de soluciones con diferente estructura, que generan el mismo nivel de riesgo y rendimiento, es el subespacio de búsqueda donde realizarían exploración las restricciones impuestas al MV.

Para estos casos complejos y en los que se requiere hallar soluciones en un tiempo manejable en la práctica, se recurre al uso de heurísticas, como por ejemplo la *Computación Evolutiva*.

La PrM y la *Computación Evolutiva* como métodos de solución del MV, generan resultados que son aproximaciones de las soluciones exactas, las cuales se desconocen. La variedad de soluciones no-dominadas otorga flexibilidad al tomador de decisiones al efectuar el análisis financiero de una inversión. En la PrM es usual unificar o escalar los objetivos dispares (p. ej., usando pesos de Lagrange) dentro de una función agregativa y entonces efectuar un procedimiento de optimización para una sola función. Si se necesita obtener un conjunto de puntos no-dominados (frente de Pareto), el procedimiento deberá realizarse tantas veces como el número de puntos deseado. En problemas multicriterio como el MV (e inclusive si es tratado como monocriterio), las funciones objetivo pueden ser no lineales y no convexas, por lo que el espacio de solución es frecuentemente difícil de caracterizar y los métodos exactos no están disponibles o son computacionalmente no factibles [42].

Además, normalmente se dispone de los datos necesarios pero, independientemente del método de solución, se ignora la dependencia funcional entre ellos.

4.1.5 Solución Evolutiva

La solución del MV utilizando AE, tiene las siguientes características básicas [6] [62] [42]:

1. Existe un espacio de soluciones factibles lo bastante grande, de manera que para todo efecto práctico, es ilimitado.
2. El realizar una búsqueda exhaustiva no es posible, o lo es en un tiempo no polinomial y no factible.
3. Se debe seleccionar de las posibles alternativas, el conjunto de las mejores en términos relativos al frente de Pareto, como un proceso de búsqueda realizado a través de un muestreo dentro del espacio de soluciones.
4. La búsqueda del frente de Pareto normalmente involucra a una población, por lo que un conjunto de puntos sobre o cerca del frente de Pareto (frontera eficiente) puede ser

obtenido en una sola simulación, debido a que siguen un enfoque poblacional y no local (a diferencia de otras heurísticas como el *recocido simulado* o la *búsqueda tabú*).

5. Se presupone que encontrar una solución aproximada en un tiempo finito es algo aceptable y posible.
6. No se requieren conocimientos específicos sobre el problema que se intenta resolver.
7. Pueden manejarse problemas con una dimensionalidad arbitraria (cualquier número de objetivos).
8. Son menos susceptibles a la forma y continuidad del frente de Pareto que las técnicas de PrM
9. Pueden explotar fácilmente las arquitecturas en paralelo, en caso de estar disponibles.
10. No garantizan obtener todos o exactamente, cada uno de los puntos del frente de Pareto.
11. La disponibilidad y preparación de la información, la capacidad de cómputo, el espacio de almacenamiento y el tiempo de respuesta requerido, son los factores limitantes para obtener buenas soluciones.

Estas características hacen posible que los AE sean capaces de lidiar con diferentes formas del frente de Pareto (desconectadas, convexas o cóncavas), sin que ello degrade su desempeño. También le permite a los AE localizar y poblar zonas promisorias en problemas con grandes espacios de búsqueda, donde las técnicas tradicionales no podrían acercarse a la zona factible en muchos casos.

Para ello, el concepto fundamental tomado por la computación evolutiva como modelo de optimización es el principio de selección natural aplicado en la evolución de las especies, el cual, se implementa de la siguiente forma [62] [34]:

1. Se tiene un modo de representación que *simula* la definición de variables de decisión mediante la *existencia* de individuos y poblaciones de individuos. Un elemento importante es la diversificación de los individuos, ya que a mayor diversificación se están

explorando diferentes regiones del espacio de búsqueda, o sea otras soluciones en cada generación.

2. Se tiene una función de aptitud que permite valorar a los individuos y su influencia en las funciones objetivo establecidas, lo que encauza a los nuevos individuos hacia la búsqueda de óptimos con respecto a las funciones objetivo.
3. Las poblaciones de individuos tienen la capacidad de reproducirse, generando nuevas poblaciones de individuos que se van adaptando al medio, permitiendo *sobrevivir* a los individuos más aptos (mejores soluciones) ya sea como individuos o como padres de nuevos individuos. Siendo esta forma de combinación entre individuos lo que crea y expande el espacio de búsqueda. Al existir varios individuos dentro de una población se está trabajando con varias soluciones a la vez, lo que minimiza la posibilidad de quedar atrapados en óptimos locales.
4. Las generaciones se van dando al evolucionar las poblaciones, y promueven el desarrollo y transformación de los individuos, limitadas únicamente por las capacidades de cómputo y espacio de almacenamiento provistas, y por el tiempo de respuesta requerido.

4.1.6 Objetivo de la tesis

Evaluar el uso de tres algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMO) en el problema de selección de instrumentos financieros que conformarán portafolios eficientes de inversión, y establecer el porcentaje a invertir de cada instrumento financiero utilizando el modelo de Análisis de Riesgo-Beneficio definido por Markowitz (MV), aplicado al caso del mercado accionario mexicano.

Evaluar cada AEMO utilizando datos reales tomados del mercado de valores mexicano.

Comparar los tres AEMO mediante métricas estándar que permitan determinar su desempeño en forma cuantitativa al solucionar el MV.

Presentar un análisis de los resultados obtenidos.

4.1.7 Método de trabajo

Se toman las implementaciones de los AEMO representativos del estado del arte en el área que ya han sido utilizados por otros autores en aplicaciones financieras (NSGA-II), y otros más que aún no se tiene conocimiento hayan sido usados para dichas aplicaciones (PAES, micro-AG para optimización multiobjetivo); a partir de estas implementaciones se desarrollan los cambios necesarios para solucionar el MV en los AEMO. Se implementa además, el concepto de la mochila binaria (*binary Knapsack*) en el manejo de las variables del modelo.

Para obtener un enfoque propio de nuestro país, se utiliza información del Mercado de Valores mexicano, ya que hasta ahora no se conoce que se hayan realizado pruebas, en otros trabajos de solución al MV, con información proveniente de México.

Para ampliar el alcance del modelo de Markowitz, se resuelve un conjunto de problemas que incluyen seis escenarios en los datos y, el uso de dos y tres funciones objetivo, junto con la implementación de una restricción.

Para determinar cuáles características (o mecanismos) de cada AEMO evaluado, parecen más idóneas para abordar el problema de interés, y para fines de comparación se utilizan cuatro métricas estándar normalmente adoptadas en la literatura de optimización evolutiva multiobjetivo. Además, se proponen: una variante a una métrica ya conocida (*métrica de conteo exitoso invertido*) y una nueva métrica (*métrica de contribución al frente*).

Y, para la consideración financiera de la aplicación, se analizan los resultados obtenidos en comparación a los *requerimientos* y se interpreta su utilidad para los analistas financieros e inversionistas, con el fin de establecer la viabilidad del uso de los AEMO para solucionar el MV.

4.2 Información

Existe una gran variedad de información financiera disponible. No obstante, obtener registros históricos de la información puede resultar una tarea laboriosa; por ello, se utilizan instrumentos financieros representativos tomados del Mercado de Valores Mexicano.

La Bolsa Mexicana de Valores (BMV) manejaba aproximadamente 133 diferentes emisiones de acciones al 3 de febrero del 2004 según el Boletín Bursátil de la misma fecha. Las emisiones se encuentran clasificadas según su bursatilidad en alta, media, baja y míni-

ma, siendo las dos últimas clasificaciones las que adolecen de no cotizar en forma regular, por lo que se utilizarán las 27 emisoras de bursatilidad alta y 26 emisoras de bursatilidad media [3] indicadas en las tablas 4.7 y 4.8 respectivamente.

Bursatilidad Alta			
1. TELMEX L	8. ALFA A	15. NAFTRAC 2	22. COMERCI UBC
2. AMX L	9. GMODELO C	16. KIMBER A	23. ELEKTRA *
3. WALMEX V	10. GFNORTE O	17. C *	24. APASCO *
4. GFBB B	11. WALMEX C	18. GEO B	25. GCARSO A1
5. CEMEX CPO	12. GMEXICO B	19. ARA *	26. GFINBUR O
6. TLEVISA CPO	13. TVAZTECA CPO	20. AMTEL A1	27. SORIANA B
7. FEMSA UBD	14. ICA *	21. TELECOM A1	

Tabla 4.7. Emisoras con Bursatilidad Alta al 3 de febrero del 2004.

Bursatilidad Media			
28. VITRO A	35. GSANBOR B-1	42. KOF L	49. VALLE B
29. BIMBO A	36. IMSA UBC	43. TELMEX A	50. HOGAR B
30. ARCA *	37. HYL SAMX B	44. DESC B	51. ASUR B
31. CIE B	38. GCC *	45. SAVIA A	52. AMX A
32. CEL *	39. BACHOCO UBL	46. USCOM B-1	53. MASECA B
33. CONTAL *	40. GRUMA B	47. TS *	
34. PE&OLES *	41. SARE B	48. GISSA *	

Tabla 4.8. Emisoras con Bursatilidad Baja al 3 de febrero del 2004.

La información tiene una *periodicidad diaria* y originalmente se consideró del 1 de enero de 1999 al 25 de febrero del 2004 con el fin de abarcar al menos 5 años de comportamiento diverso del mercado (53 emisoras con 1290 datos diarios) con una marcada estabilidad que se ve modificada por una tendencia a la alza a partir de agosto del 2003 aproximadamente, según se puede observar a partir de las gráficas históricas de los principales índices de mercado de la BMV: índice de precios y cotizaciones IPC, índice México INMEX, índice de la mediana capitalización IMC30, índice de rendimiento total IRT⁴³.

Como puede observarse en la tabla 4.9 la información presenta las siguientes características:

⁴³ Las gráficas de tendencia histórica pueden ser consultadas en <http://www.bmv.com.mx> en la etiqueta *Mer-
cado de Capitales, Índices Mercado*.

Precios de Cierres Sin Ajustar Ticker: ALFA Serie: A Fecha Inicial: 1/1/1999 Fecha Final: 4/14/2004 Valores del Cierre		Precios de Cierres Sin Ajustar Ticker: AMTEL Serie: A1 Fecha Inicial: 1/1/1999 Fecha Final: 2/24/2004 Valores del Cierre		Precios de Cierres Sin Ajustar Ticker: AMX Serie: A Fecha Inicial: 1/1/1999 Fecha Final: 2/24/2004 Valores del Cierre		Precios de Cierres Sin Ajustar Ticker: AMX Serie: L Fecha Inicial: 1/1/1999 Fecha Final: 2/24/2004 Valores del Cierre	
FECHA	CIERRE	FECHA	CIERRE	FECHA	CIERRE	FECHA	CIERRE
01/04/1999	27.5	05/02/2002	8.14	02/07/2001	9.9	02/07/2001	9.95
01/05/1999	26.5	05/03/2002	8.17	02/08/2001	10.3	02/08/2001	10.36
01/06/1999	26.2	05/06/2002	8.3	02/09/2001	10.4	02/09/2001	11.08
01/07/1999	25.6	05/07/2002	8.3	02/12/2001	11.23	02/12/2001	11.26
01/08/1999	25.5	05/08/2002	8.49	02/13/2001	10.56	02/13/2001	10.62
01/11/1999	27.85	05/09/2002	8.3	02/14/2001	9.7	02/14/2001	9.9
01/12/1999	25.2	05/10/2002	8.14	02/15/2001	9.8	02/15/2001	9.72
01/13/1999	23.1	05/13/2002	8.22	02/19/2001	9.67	02/16/2001	9.96
01/14/1999	22.8	05/14/2002	8.04	02/20/2001	9.6	02/19/2001	9.9
01/15/1999	25.2	05/15/2002	8.1	02/22/2001	9.15	02/20/2001	9.65
01/18/1999	25	05/16/2002	8.22	02/23/2001	8.8	02/21/2001	9.35
01/19/1999	24.1	05/17/2002	8.22	02/27/2001	8.5	02/22/2001	9.24
01/20/1999	25	05/20/2002	7.9	02/28/2001	8.7	02/23/2001	8.86
01/21/1999	24.2	05/21/2002	7.73	03/01/2001	8.4	02/26/2001	8.87
01/22/1999	23.65	05/22/2002	7.86	03/02/2001	8.2	02/27/2001	8.82

Tabla 4.9. Ejemplo de la Información de acciones del Mercado de Capitales de la BMV:

1. Las fechas de inicio de operaciones para cada emisora no son necesariamente iguales.
2. Existen emisoras que después de un tiempo de estar cotizando en la BMV, por diferentes causas dejan de operar.
3. Existen casos en los cuales las emisoras no cotizan en algunas fechas, debido a diferentes circunstancias.

Escenario	Rango de los Datos	No. observaciones	Emisoras	No. Datos diarios
BMV1999	5-ene-1999 al 30-dic-1999	6, 777	27	251
BMV2000	3-ene-2000 al 29-dic-2000	6, 750	27	250
BMV2001	2-ene-2001 al 31-dic-2001	6, 723	27	249
BMV2002	2-ene-2002 al 31-dic-2002	6, 777	27	251
BMV2003	2-ene-2003 al 31-dic-2003	6, 777	27	251
BMV99-04	5-ene-1999 al 24-feb-2004	34, 803	27	1, 289

Tabla 4.10. Escenarios de trabajo creados a partir de la información de la BMV.

Con el fin de contar con un conjunto de datos homogéneo se decidió acotar la *fecha inicial de la información al 5 de enero de 1999*, fecha en la cual una gran parte de las emisoras reportaron cotización. De igual forma se eligió como *fecha final el 24 de febrero del 2004*, fecha en la cual permanecían cotizando una gran parte de las emisoras.

Se analizó la información ya acotada en lo relativo a los precios de cierre de las emisoras, localizando a aquellas emisoras que tenían más de 2 días sin cotizar en forma continua para cualquiera fecha y fueron eliminadas. Esto condujo a obtener 34,803 observaciones: *27 emisoras con 1289 datos diarios cada una*. A partir de este conjunto de datos homogéneo se decidió crear 6 *escenarios de trabajo*, esto es uno para cada año completo de información y el conjunto original que incluye a todo el rango de datos. Esto permite realizar comparaciones sobre espacios de búsqueda diferentes, y para el análisis financiero permite evaluar el comportamiento de los portafolios elegidos. Las características de los escenarios de trabajo se muestran en la tabla 4.10.

Sólo se consideran los *precios de cierre del día*, dato necesario para obtener los rendimientos históricos. En el caso de que una emisora no coticie en ciertas fechas se duplica el valor del último día anterior de la información. Una vez creados los escenarios de datos se procedió a calcular el *rendimiento diario* en función de los *precios de cierre*; a saber⁴⁴:

$$rend = \frac{pc_t - pc_{t-1}}{pc_{t-1}} \quad (4.34)$$

donde: *rend* es la variación diaria de los precios de cierre o rendimiento diario de la emisora; pc_t y pc_{t-1} son los precios de cierre del día t y del día anterior $t - 1$ respectivamente.

Además, para cada emisora se calcula el rendimiento promedio y la desviación con respecto a la media de los rendimientos diarios. Aplicando estas consideraciones y la ecuación (4.34), se obtiene el ejemplo mostrado en la tabla 4.11 a partir de la información original.

También se calcula la matriz de Varianza-Covarianza de todas las emisoras para cada escenario de trabajo, de la cual se muestra un ejemplo en la tabla 4.12.

⁴⁴ También se puede utilizar: $rend = \ln\left(\frac{pc_t - pc_{t-1}}{pc_{t-1}}\right)$

Sin embargo para la periodicidad diaria las variaciones en los precios son muy pequeñas, por lo que se comporta mejor la fórmula del texto.

Precios de Cierres Sin Ajustar Ticker: ALFA Serie: A Fecha Inicial: 1/1/1999 Fecha Final: 4/14/2004 Valores del Cierre		Rendimiento	Desviación del promedio	Desviación al cuadrado
FECHA	CIERRE			
01/05/1999	26.5			
01/06/1999	26.2	-0.0113	-0.012107505	0.000146592
01/07/1999	25.6	-0.0229	-0.023687514	0.000561098
01/08/1999	25.5	-0.0039	-0.004693	2.20243E-05
01/11/1999	27.85	0.0922	0.091370112	0.008348497
01/12/1999	25.2	-0.0952	-0.095939354	0.00920436
01/13/1999	23.1	-0.0833	-0.084120084	0.007076188
01/14/1999	22.8	-0.0130	-0.013773763	0.000189717
01/15/1999	25.2	0.1053	0.104476408	0.01091532
01/18/1999	25	-0.0079	-0.008723258	7.60952E-05
01/19/1999	24.1	-0.0360	-0.03678675	0.001353265
01/20/1999	25	0.0373	0.036557648	0.001336462
01/21/1999	24.2	-0.0320	-0.03278675	0.001074971
01/22/1999	23.65	-0.0227	-0.023514023	0.000552909
01/25/1999	23.25	-0.0169	-0.01770007	0.000313292
01/26/1999	24.05	0.0344	0.033621852	0.001130429
...
02/13/2004	41.79	0.0230	0.022224266	0.000493918
02/16/2004	42.5	0.0170	0.01620296	0.000262536
02/17/2004	42.01	-0.0115	-0.012316162	0.000151688
02/18/2004	42.01	0.0000	-0.00078675	6.18976E-07
02/19/2004	41.59	-0.0100	-0.01078437	0.000116303
02/20/2004	40.99	-0.0144	-0.015213295	0.000231444
02/23/2004	40.3	-0.0168	-0.017620124	0.000310469
02/24/2004	41.36	0.0263	0.025515979	0.000651065
media		0.0008	1.59277E-17	0.000889108
min		-0.1213	promedio	varianza
max		0.1759		0.029817918
min global		-0.90058643	desviación estándar	
max global		4.08993289		

Tabla 4.11. Ejemplo de la base de datos homogénea creada a partir de la información de BMV99-04.

COVARIANZAS	ALFA A	APASCO *	ARA *	BIMBO A	...
ALFA A	0.000888	0.000186	0.000175	0.000162	...
APASCO *	0.000186	0.000365	0.000123	0.000118	...
ARA *	0.000175	0.000123	0.000780	0.000096	...
BIMBO A	0.000162	0.000118	0.000096	0.000452	...
CEMEX CPO	0.000250	0.000171	0.000151	0.000138	...
CIE B	0.000264	0.000182	0.000175	0.000162	...
COMERCI UBC	0.000233	0.000148	0.000109	0.000128	...
DESC B	0.000279	0.000147	0.000097	0.000127	...
...

Tabla 4.12. Ejemplo de la matriz de Varianza-Covarianza con información de BMV99-04.

A partir de la información de BMV99-04 se tiene un ejemplo de las parejas de instrumentos financieros con mayor y menor correlación en las figuras 4.13 y 4.14 respectivamente.

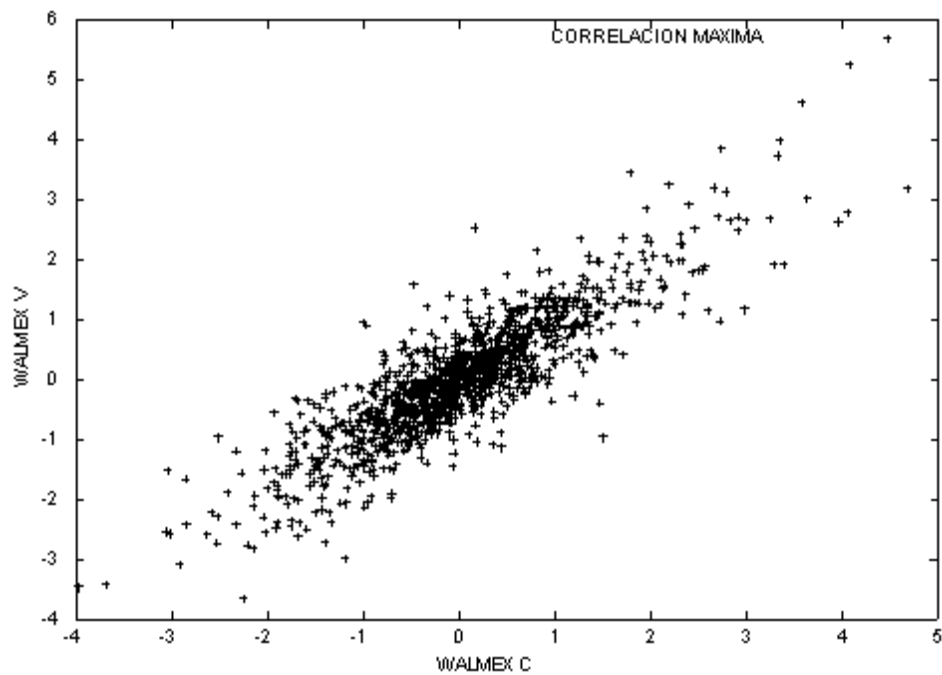


Fig. 4.13. $\rho = 0,8695263$ Elaboración propia con datos de la BMV.

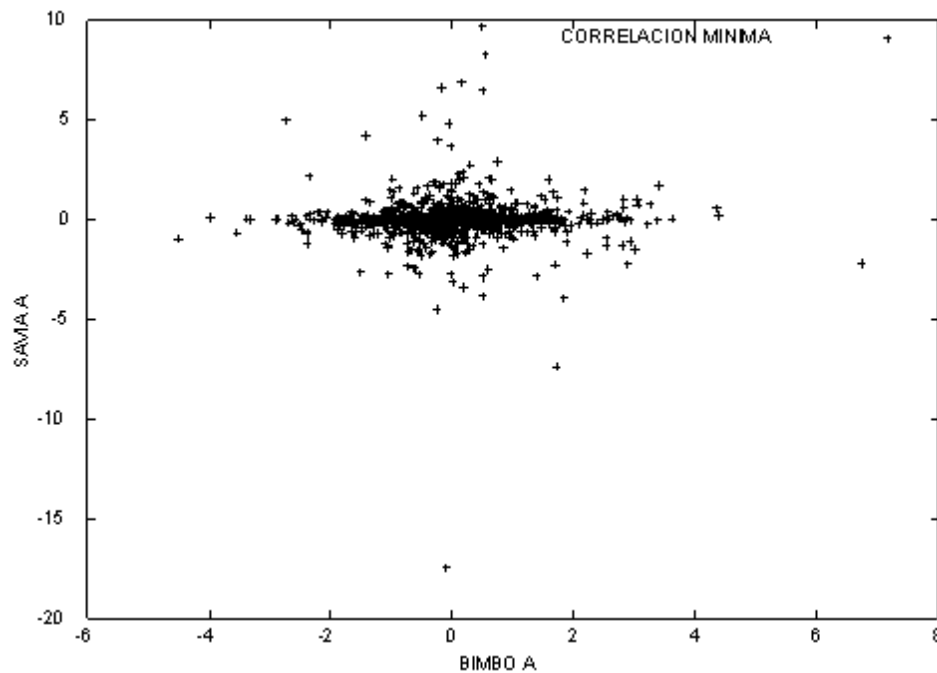


Fig. 4.14. $\rho = 0,00232379$ Elaboración propia con datos de la BMV.

4.3 Implementación de la solución evolutiva

En la sección 1.3 se explicaron los elementos que componen a un AE. A partir de estos, y utilizando como modelo los AEMO descritos en la sección 1.6, se realiza la implementación de la solución evolutiva. Se inicia diseñando el cromosoma que habrá de utilizarse en los AEMO, se analiza el tratamiento por aplicar a la representación del problema, se especifican los modelos de los problemas a simular, se establecen los parámetros que requieren para su ejecución cada uno de los AEMO, y se analizan e implementan las características y variantes desarrolladas para cada AEMO a efecto de realizar una comparación lo más equilibrada posible.

4.3.1 Diseño del cromosoma

Los AEMO desarrollados en este trabajo de tesis utilizan un cromosoma de 540 bits constituido por 27 genes, uno para cada instrumento financiero. Cada gene representa el peso de inversión para cada instrumento financiero dentro del portafolio. Se tienen varias posibilidades de tamaño para los genes, lo cual establece la cantidad de valores dentro del

rango específico, entre cero y uno para nuestro caso, que puede representar cada gene y por ende la precisión de cada instrumento financiero y el modelo.

Por ejemplo, para representar valores entre las cotas 0 y 1 con una precisión de 3 dígitos decimales, se requiere de valores que vayan del 0.000 al 0.999, los cuales usando representación binaria utilizarían $\log_2(999) \approx 10$ bits para cada gene.

Como puede observarse el tamaño del espacio de búsqueda creado por las combinaciones por cromosoma, representan las soluciones potencialmente explorables para el AEMO, presentándose incluso dificultad para enumerarlas. Para realizar las simulaciones de esta tesis es seleccionada la precisión de 6 dígitos decimales que utiliza un gene de tamaño $\log_2(999999) \approx 20$ bits.

4.3.2 Análisis de la representación adoptada

Como indican Streichert et al. [60] [59] [61] la noción de que los portafolios que forman la frontera eficiente (frente de Pareto) generalmente están formados por un subconjunto de todos los instrumentos financieros disponibles se comprueba empíricamente al realizar simulaciones con los AEMO y al revisar los portafolios que forman los frentes verdaderos, especialmente al aplicar las restricciones de cardinalidad. Con base en lo anterior, surge la idea de utilizar una representación singular para el problema del MV.

Streichert et al. implementan un AE utilizando la representación usual de un vector W de variables de decisión w_i , además de una cadena B de n bits para n instrumentos financieros. Cada bit b_i de la cadena de bits B determina cuando el instrumento financiero asociado es un elemento del portafolio o no, de tal forma que el valor de la variable de decisión es $w'_i = b_i \times w_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Schlottmann y Seese [53] mencionan que no es de sorprender que muchos problemas de finanzas corresponden a la clase de los problemas NP-completos, debido a que tienen una estructura combinatoria la cual es equivalente (con respecto a reducciones en tiempo polinomial) a los bien conocidos problemas NP-completos. Por ejemplo, la selección de portafolios con restricciones es equivalente al siguiente problema el cual se ha demostrado que es NP-completo.

Problema de la mochila o Knapsack. Dado un conjunto finito U junto con los valores enteros positivos $s(u)$ (el tamaño de u) y $v(u)$ (el valor de u) para cada elemento $u \in U$, y el

entero positivo B como restricción de tamaño y un entero positivo K como valor objetivo. Encontrar un subconjunto $U' \in U$ tal que $\sum_{u \in U'} s(u) \leq B$ y $\sum_{u \in U'} v(u) \geq K$.

Schlottmann y Seese consideran que desde el punto de vista de la complejidad computacional, el MV es equivalente a resolver un *problema semejante al Knapsack* usando variables de decisión con *valores reales*. En la formulación anterior del Knapsack se consideran variables de decisión binarias, por lo tanto la complejidad es menor, si bien aquí, la función objetivo no es lineal. Schlottmann y Seese hacen referencia a varias publicaciones donde se ha implementado un AE con una restricción para la supervisión del presupuesto de capital, utilizando cruza de un punto y el operador estándar de mutación para variables de estilo binario (p. ej., la variable $w_i = e_i$ es mutada a $w_i = 0$ y viceversa) con una probabilidad de mutación de $p_{mut} = \frac{1}{n}$ por gene, para n instrumentos financieros, donde $i = 1, \dots, n$ y $e_i \in \mathbb{R}_+$ es la exposición neta.

Fieldsend et al. [22] realizan una implementación del MV con restricción de cardinalidad utilizando un AE, donde sin nombrar específicamente el estilo de la representación como Knapsack, utilizan un procedimiento similar de generación de los individuos. El AE mantiene un conjunto de conjuntos H consistente de diferentes fronteras eficientes, una para cada valor de la restricción de cardinalidad. Cada uno de estos conjuntos de cardinalidad H_k se inicializa con una estructura de portafolio aleatoria, con valores aleatorios no-negativos w_i , donde $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ y el número de w_i diferentes de cero, es igual a k , para n instrumentos financieros. En el proceso del AE se selecciona un portafolio w el cual se ajusta; esto toma la forma de *ajuste de peso* el 50 % del tiempo, y en el resto de los casos se aplica un ajuste de peso además de un cambio de dimensionamiento. Cuando se ajusta el peso se mantiene $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ y $w_i \geq 0$, y cualquier w_i que previamente era cero, se mantiene en cero. Cuando se aplica también un cambio de dimensionamiento, cualquier valor diferente de cero en w es cambiado a cero (remoción del instrumento financiero) o en una w con valor de cero se asigna un valor tomado de $U(0, 1/k)$ (donde U denota la distribución uniforme y k es el número de instrumentos financieros activos en el nuevo portafolio). El nuevo portafolio obtenido es entonces comparado utilizando el criterio de dominancia, y actualizará en su caso el conjunto correspondiente de cardinalidad H_k .

Como puede observarse en los trabajos anteriormente comentados, los resultados empíricos apoyan el tratamiento del MV como un problema similar al del *Knapsack*.

En este sentido se propone descomponer el problema en dos partes, la primera donde se determina qué instrumentos financieros formarán parte del portafolio, y la segunda asignando diferentes combinaciones de pesos al subconjunto elegido de instrumentos financieros (ver figura 4.15). Bajo esta premisa inicial, la disposición y combinación de instrumentos financieros en el portafolio se parece al problema de la mochila binaria (*0-1 Knapsack problem*).

Para eliminar y agregar fácilmente instrumentos financieros al portafolio, se asocia un proceso de mutación (parecido a lo descrito anteriormente por Schlottmann y Seese, y también por Fieldsend et al.) alterno al normalmente aplicado a las variables de decisión w_i . Para ello, se utiliza una representación en la cual cada *cromosoma de 540 bits* está formado por 27 *genes*, donde cada gene está formado por 20 *bits*.

Primero, se intenta seleccionar con una probabilidad de ocurrencia de $\frac{1}{27}$ un gene w_i por cromosoma, para que a tal gene le sea aplicada una mutación a cada uno de sus alelos con valor de 1 y cambien dicho valor a 0; esto con la finalidad de producir un gene con un valor de fenotipo igual a cero. Esto permite determinar cuándo el instrumento financiero asociado será elemento del portafolio o no. Situación especial es este valor de *cero* para el gene, que en nuestro caso puede considerarse como una de las dos alternativas del *Knapsack binario*. La otra alternativa (el *uno*) es el conjunto de valores diferentes a cero, lo que lleva a una situación parecida al problema del *Knapsack real*⁴⁵. En especial, para las restricciones de cardinalidad esto permite generar soluciones factibles.

Segundo, si como resultado de evaluar la probabilidad de mutación a nivel gene, no se selecciona el gene actual, o el gene actual habiendo sido seleccionado no sufrió cambio alguno porque no tenía ningún alelo con valor de 1, se intenta entonces aplicar la mutación bit a bit con una probabilidad de ocurrencia de $\frac{1}{540}$.

Otro elemento que complementa el número de soluciones factibles generadas es cumplir con la restricción (2.21) que limita al rango establecido la representación de la solución, $w_i \in \{0, 1\}$, y la implementación de la restricción (2.20) donde la suma de las proporciones de instrumentos financieros que conforman el portafolio debe ser 1. Para ello, en lugar de rechazar las soluciones no factibles desde el punto de vista de las restricciones iniciales del MV, se aplica la *heurística de búsqueda local* mencionada por Streichert et al. [60] para convertir una solución no factible a una factible, mediante un *mecanismo de reparación* sobre los individuos generados por el AEMO que convierte una solución in-

⁴⁵ En este caso se permiten varios valores diferentes a cero.

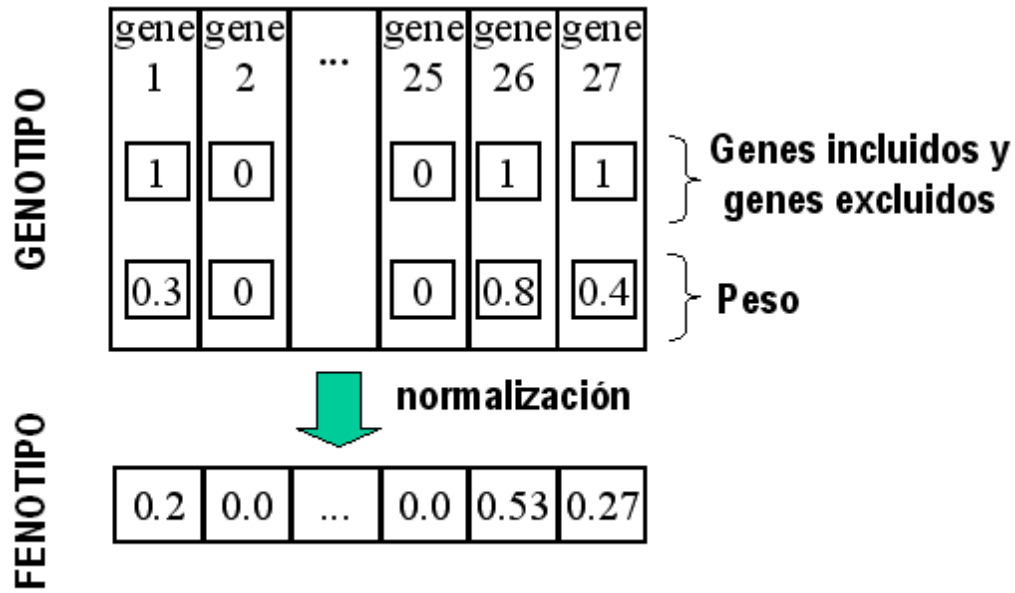


Fig. 4.15. Codificación propuesta del cromosoma para el problema del MV.

factible en una solución factible. Esto se logra utilizando la siguiente *normalización* que se aplica a los *valores representados*:

$$w'_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^m w_j}$$

donde: w'_i representa el nuevo valor de peso para el instrumento financiero i ; w_i es el valor actual de peso para el instrumento financiero i ; m es el número de instrumentos financieros seleccionados del conjunto total de n instrumentos financieros; e $i = 1, \dots, n$.

Los *valores representados* son los utilizados como equivalentes decimales para cada gene que compone a un cromosoma (individuo) como se observa en la tabla 4.13.

Los AEMO que utilizan la representación modificada se nombran como *Knapsack Portfolio - Nondominated Sorting Genetic Algorithm 2* (KP_NSGA2), *Knapsack Portfolio - Pareto Archived Evolution Strategy* (KP_PAES), y *Knapsack Portfolio - micro Genetic Algorithm for multiobjective optimization* (KP_mAG).

Genes:	instr1	instr2	instr3	...	instr27	
representación binaria 6 bits:	000000	000101	000010	...	000011	
equivalente decimal:	0	5	2	...	3	si {instr4,...,instr26}=0.0
valor representado w_i :	0.0	0.357 14	0.142 86	...	0.214 29	$\sum_{i=1}^{27} = 0.71429$
valor normalizado w'_i :	$\frac{0.0}{0.71429}$	$\frac{0.357 14}{0.71429}$	$\frac{0.142 86}{0.71429}$...	$\frac{0.214 29}{0.71429}$	$\sum_{i=1}^{27} = \frac{0.71429}{0.71429}$
= valor fenotipo w_i :	0.0	0.5	0.2	...	0.3	$\sum_{i=1}^{27} = 1.0$

Tabla 4.13. Ejemplo de normalización de los valores representados a partir de la representación de 6 bits.

4.3.3 Modelos simulados

Se establecieron cuatro variantes del MV a resolver utilizando los AEMO propuestos, éstas son las siguientes:

MV_FO2

Consiste del MV descrito originalmente por Markowitz. Utiliza las dos funciones objetivo descritas en la ecuación (2.18) para maximizar el rendimiento y (2.19) para minimizar el riesgo. Además, se usan dos restricciones, la ecuación (2.20) que asegura que el portafolio considere totalmente a todos los instrumentos financieros para ser invertidos, y la ecuación (2.21) que no permite las ventas en corto.

MV_FO3

Se establece una tercera función objetivo además de las dos originalmente propuestas en el MV, la cual es descrita por Vedarajan et al. [65]. Consiste en reducir el **costo de transacción** en el cual se incurre por cambios en la estructura del portafolio (*rebalanceo*). Se define en la ecuación (3.23) y para su implementación se considera una estructura de porcentajes de inversión asignados a un portafolio inicial, así como el conjunto de costos asignados a cada variable (instrumento financiero) al efectuar el rebalanceo. Para efecto de las pruebas se utiliza el caso en el que no se ha realizado inversión anterior alguna, por lo que se parte de un portafolio inicial con valores de cero asignados a todos los porcentajes de inversión. Y se considera un gasto uniforme de una unidad de costo por rebalanceo.

portafolio inicial	$p_1, p_2, p_3, \dots, p_{27}$ donde $p_i = 0.0$ para $i = 1, 2, 3, \dots, 27$
costo transacción	$c_1, c_2, c_3, \dots, c_{27}$ donde $c_i = 1.0$ para $i = 1, 2, 3, \dots, 27$

MV_FO2_CC4, MV_FO2_CC8, MV_FO2_CC12, MV_FO2_CC26

Se plantea la optimización de dos funciones objetivo y se considera el manejo de una restricción extra además de las originalmente requeridas por el MV, implementando las llamadas **restricciones de cardinalidad** como las proponen Streichert et al. [60] [59] [61], que consisten en aplicar un número exacto de instrumentos financieros para formar el portafolio de inversión. Esto se describe en la ecuación (3.31).

Para la implementación se aplica la restricción al modelo MV_FO2 y se realizan las simulaciones que consideran a portafolios formados exactamente por 4, 8, 12 y 26 instrumentos financieros.

MV_FO3_CC4, MV_FO3_CC8, MV_FO3_CC12, MV_FO3_CC26

Se plantea la optimización de tres funciones objetivo y se considera el manejo de una restricción extra además de las originalmente requeridas por el MV, implementando las llamadas **restricciones de cardinalidad** como las proponen Streichert et al. [60] [59] [61], que consisten en aplicar un número exacto de instrumentos financieros para formar el portafolio de inversión. Esto se describe en la ecuación (3.31).

Para la implementación se aplica la restricción al modelo MV_FO3 y se realizan las simulaciones que consideran a portafolios formados exactamente por 4, 8, 12 y 26 instrumentos financieros.

4.3.4 Parámetros de los AEMO

La importancia de los parámetros utilizados en la ejecución de cada AEMO está en el hecho de que influyen directamente en la forma en que realizan su proceso evolutivo en aspectos como la velocidad de convergencia, la calidad de las soluciones, la distribución de las soluciones sobre el frente de Pareto, la diversidad en la estructura de los cromosomas, etc.

Para realizar las pruebas del MV es necesario primero determinar valores iniciales para los parámetros requeridos para la ejecución de cada uno de los AEMO. Con este fin se ejecutaron cada uno de los AEMO utilizando para ello cada uno de los 6 escenarios de trabajo, variando solamente uno de los parámetros a la vez, con lo que analizando los resultados de estas pruebas iniciales se concluyó con los valores que aquí se muestran. Para

lograr una correcta interpretación de los parámetros utilizados por cada AEMO se sugiere revisar la bibliografía disponible al respecto.

Los tres AEMO consideran que el problema maneja 27 emisoras o variables, y se les aplicó la modificación propuesta a la representación de las variables para el manejo del *Knapsack*. Con el fin de realizar la comparación de los AEMO implementados para el problema del MV, los parámetros para los tres AEMO se muestran en la tabla 4.14.

	NSGA-II	PAES	micro-AG para optimización multiobjetivo
	KP_NSGA2	KP_PAES	KP_mAG
representación	binaria		
número de genes	27		
tamaño gene	20 bits		
tamaño cromosoma	540 bits		
tamaño población	200 individuos		
generaciones	499	100,000	24,984
evaluaciones	100,000	100,000	100,000
tipo de selección	torneo	último individuo	torneo binario con base en dominancia
probabilidad de cruza	0.8	NA	0.8
tipo de cruza	1 punto	NA	2 puntos
probabilidad de mutación	$\left(\frac{1}{\text{bits del cromosoma}}\right) = \frac{1}{540} = 0.0018518$		
probabilidad mutación Knapsack	$\left(\frac{1}{\text{genes del cromosoma}}\right) = \frac{1}{27} = 0.037037$		
tipo de mutación	bit a bit, y para Knapsack gene a gene		
profundidad/subdivisiones	NA	6, para 2 objetivos 4, para 3 objetivos	25
tamaño archivo externo/Pareto	200		
tamaño de la Memoria Población	NA	NA	60
% no reemplazable de la Mem Pobl.	NA	NA	0.3
iteraciones convergencia nominal	NA	NA	1
ciclo de segundo elitismo	NA	NA	10
Funciones Objetivo	2 y 3		
Restricciones	ninguna y 1		
valores restricciones de cardinalidad	4, 8, 12, 26		
portafolio inicial	$p_i = p_1, \dots, p_{27} = 0.0$		
costo transacción	$c_i = c_1, \dots, c_{27} = 1.0$		

Tabla 4.14. Parámetros para ejecución de los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivos adoptados en este estudio comparativo.

4.3.5 Desarrollo de los AEMO

4.3.6 NSGA-II

Deb, Pratap, Agarwal y Meyarivan [16] describen el NSGA-II como se muestra en las tablas 4.15, 4.16 y 4.17 (ver también la sección 1.6.1).

Algunos de los parámetros importantes de este AEMO se comentan a continuación (ver la sección 1.6).

El valor tamaño de la Población $N = 200$ indica el número de óptimos de Pareto que será el resultado final del NSGA-II.

El valor $gener = 499$ es la condición de paro del NSGA-II.

El $P_{cruza} = 0.8$ indica el porcentaje de individuos de la población que debe recombinar sus cromosomas.

El porcentaje de mutación $P_{mut} = \left(\frac{1}{bits\ del\ cromosoma} \right)$ indica el porcentaje de alelos del cromosoma que deberán modificarse.

El porcentaje de mutación Knapsack $P_{mKnapsack} = \left(\frac{1}{genes\ del\ cromosoma} \right)$ indica el porcentaje de genes del cromosoma que deberán modificarse.

4.3.7 Cambios efectuados al NSGA-II

La implementación del comportamiento del Knapsack binario se realiza al momento de aplicar la mutación de los nuevos individuos producto de la selección y cruza en la generación anterior, agregando la alternativa de la mutación a nivel gene como se explica en la sección 4.3.2.

Además, se realizan las modificaciones necesarias para implementar la evaluación de la aptitud de una tercera función objetivo y el manejo de una restricción.

4.3.8 PAES

Knowles y Corne [33] describen el PAES como se muestra en las tablas 4.18 y 4.19 (ver también la sección 1.6.2).

Algunos de los parámetros importantes de este AEMO se comentan a continuación (ver la sección 1.6).

$R_t = P_t \cup Q_t$	Combina la población de padres e hijos
$F = \text{fast-non-dominated-sort}(R_t)$	$F = (F_1, F_2, \dots)$ son todos los frentes no-dominados de R_t
$P_{t+1} = \emptyset$ y $i = 1$	
hasta $ P_{t+1} + F_i \leq N$	Repite hasta que la población del padre es llenada
crowding-distance-assignment (F_i)	Calcula la densidad en F_i
$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$	Incluye el i -ésimo frente no-dominado en la población del padre
$i = i + 1$	Verifica el siguiente frente por incluir
$\text{Sort}(F_i, \prec_n)$	Clasifica en forma descendente utilizando el operador de orden parcial
$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1 : (N - P_{t+1})]$	Escoge los primeros $(N - P_{t+1})$ elementos de F_i
$Q_{t+1} = \text{make-new-pop}(P_{t+1})$	Aplica selección, cruza y mutación para crear una nueva población Q_{t+1} ; utiliza para ello P_{cruza} , P_{mut} y $P_{\text{mKnapsack}}$
$t = t + 1$	Incrementa el contador de generaciones
	El algoritmo se repite <i>gener</i> veces

Tabla 4.15. Pseudo-código del NSGA-II

Para cada $p \in P$	Para cada punto p por clasificar
$S_p = \emptyset$	
$n_n = 0$	
para cada $q \in P$	Para cada punto a comparar
if ($p \prec q$) then	Si p domina q
$S_p = S_p \cup \{q\}$	Agregar q al conjunto de soluciones dominadas por p
else if ($q \prec p$) then	
$n_p = n_p + 1$	Incrementar el contador de dominados por p
if $n_p = 0$ then	p es miembro del primer frente
$p_{\text{rank}} = 1$	
$F_1 = F_1 \cup \{p\}$	
$i = 1$	Inicializa el contador de los frentes
mientras $F_i \neq \emptyset$	
$Q = \emptyset$	Usado para almacenar a los miembros del siguiente frente
para cada $p \in F_i$	
para cada $q \in S_p$	
$n_q = n_q + 1$	
if $n_q = 0$ then	q es miembro del siguiente frente
$q_{\text{rank}} = i + 1$	
$Q = Q \cup \{q\}$	
$i = i + 1$	
$F_i = Q$	

Tabla 4.16. Pseudo-código de **fast-non-dominated-sort**(P)

$l = I $	Número de soluciones del conjunto de no-dominados I
para cada i , asignar $I[i]_{distancia} = 0$	Inicializa distancia
para cada objetivo m	
$I = sort(I, m)$	Clasifica usando cada valor de los objetivos
$I[1]_{distancia} = I[l]_{distancia} = \infty$	tal que los puntos límite son siempre elegidos
para $i = 2$ hasta $(l - 1)$	para todos los otros puntos
$I[i]_{distancia} = I[i]_{distancia}$ $+ (I[i + 1].m - I[i - 1].m)$ $/ (f_m^{max} - f_m^{min})$	

Tabla 4.17. Pseudo-código de **crowding-distance-assignment**(I)

El valor *profundidad* indica el número de subdivisiones recursivas o profundidad de la malla adaptativa. Se utiliza una profundidad de 6 para el manejo de 2 funciones objetivo con y sin restricciones, y se aplica una profundidad de 4 para el manejo de 3 funciones objetivo con y sin restricciones

El valor *tamañoArchivo* = 200 indica el número de óptimos de Pareto que será el resultado final del PAES.

El valor *iteraciones* = 100000 es la condición de paro del PAES.

El porcentaje de mutación $Pm = \left(\frac{1}{bits\ del\ cromosoma} \right)$ indica el porcentaje de alelos del cromosoma que deberán modificarse.

El porcentaje de mutación Knapsack $PmKnapsack = \left(\frac{1}{genes\ del\ cromosoma} \right)$ indica el porcentaje de genes del cromosoma que deberán modificarse.

4.3.9 Cambios efectuados al PAES

Al realizar pruebas en este AEMO utilizando los parámetros indicados en la tabla 4.14 se mostró un comportamiento que no generaba soluciones cercanas al AFPV del modelo (ver sección 4.4.1). En particular, no se generaba solución alguna al aplicar aquellos modelos diferentes al MV_FO2, por ejemplo usando restricciones de cardinalidad. Se analizó el código del algoritmo y se propuso una modificación en el algoritmo original de la tabla 4.19.

En la tabla 4.19 se describe del paso aplicar **prueba**($c, m, archivo$), el cual en su implementación en código de programa, verifica que: si nadie domina entre m y c , y m es no-dominada por el archivo⁴⁶, se actualiza la rejilla y el archivo con m ; ahora si

⁴⁶ En el pseudo-código se indica que se verifica:

m pertenece a una región menos poblada que c o si m domina algún miembro del archivo entonces se acepta a m como la nueva solución actual.

Generar aleatoriamente la solución inicial c y agregarla al archivo	
Mutar c para producir m , y evaluar m	Aplica mutación utilizando P_m y $P_mKnapsack$
if (c domina m) descartar m	
else if (m domina c)	
reemplazar c con m , y agregar m al archivo	
else if (m es dominada por cualquier miembro del archivo) descartar m	Nadie domina entre m y c , y m es no-dominada por el archivo
else aplicar prueba ($c, m, \text{archivo}$) para determinar quien se convertirá en la nueva solución actual y si será agregada m al archivo	
hasta que sea alcanzado algún criterio de terminación	El algoritmo se repite $iteraciones$ veces

Tabla 4.18. Pseudo-código de (1+1)-PAES

If el archivo no está lleno	Se llena el archivo con $tamaño_{Archivo}$ elementos
agregar m al archivo	
if (m pertenece a una región menos poblada del archivo que c)	
aceptar a m como la nueva solución actual	
else mantener a c como la solución actual	
else	
if (m pertenece a una región menos poblada del archivo que x para algún miembro x del archivo)	
agregar m al archivo, y eliminar a un miembro del archivo que pertenezca a la región más poblada	
if (m pertenece a una región menos poblada del archivo que c)	/*modificación*/
aceptar a m como la nueva solución actual	/*modificación*/
else mantener a c como la solución actual	
else	
if (m pertenece a una región menos poblada del archivo que c)	
aceptar a m como la nueva solución actual	
else mantener a c como la solución actual	

Tabla 4.19. Pseudo-código de **prueba**($c, m, \text{archivo}$)

if (m pertenece a una región menos poblada del archivo que x para algún miembro x del archivo)

Sin embargo en la implementación del código disponible por Knowles, se pregunta por la no-dominancia de la manera siguiente:

si nadie domina entre m y c , y m es no-dominada por el archivo

if (m domina a los miembros de archivo **or** existe no-dominancia en ambos sentidos)
and (m pertenece a una región menos poblada del archivo que c)
 aceptar a m como la nueva solución actual

Tabla 4.20. Modificación propuesta al código de PAES.

La modificación estriba en determinar cuando m es la solución actual de la forma descrita en la tabla 4.20, y consiste de la siguiente secuencia de acciones: se prueba que si nadie domina entre m y c , y m es no-dominada por el archivo, *a*) se actualiza la rejilla y el archivo con m ; ahora si m pertenece a una región menos poblada que c (*se elimina la condición:* o si m domina algún miembro del archivo) entonces *b*) se acepta a m como la nueva solución actual.

Se puede analizar de la siguiente forma: primero, m actualiza la rejilla y el archivo (paso *a*) con relación a la no-dominancia entre m y c , y de que m es no-dominada por el archivo. Segundo, se acepta a m como la nueva solución actual para fines de la evolución del individuo (paso *b*), solamente si además de realizarse el paso *a*, m pertenece a una región menos poblada que c , y eso es todo.

Esto evita la evolución de un individuo m *que domina algún miembro del archivo*, y que puede pertenecer o no, a una región menos poblada que c . Previsto esto, se transforma en lo siguiente: se permite la evolución de un individuo m que es no-dominado por el archivo, y que además pertenece a una región menos poblada que c .

Esto promueve que para fines de la evolución del individuo, se busquen individuos que pertenezcan a las regiones menos pobladas, esto con el fin de evitar que más individuos se ubiquen y dominen una misma región del frente de Pareto, lo que se verificó con las simulaciones realizadas, en especial para los modelos diferentes al MV_FO2.

La implementación del comportamiento del Knapsack binario se realiza al momento de aplicar la mutación al último individuo producido en la generación anterior (solución actual), agregando la alternativa de la mutación a nivel gene como se explica en la sección 4.3.2.

Además, se realizan las modificaciones necesarias para implementar la evaluación de la aptitud de una tercera función objetivo y el manejo de una restricción.

4.3.10 Micro-AG para optimización multiobjetivo

Toscano [62] describe el micro-AG como se muestra en las tablas 4.21, 4.22 y 4.23 (ver también la sección 1.6.3).

Algunos de los parámetros importantes de este AEMO se comentan a continuación (ver sección 1.6).

El tamaño de la población de trabajo $M = 4$ es el parámetro que caracteriza al micro-AG.

El tamaño de la memoria de población (MPo) $tamMem = 60$ es el valor que establece el tamaño del espacio de donde se tomarán los elementos de la población de trabajo.

El porcentaje no reemplazable de la memoria de población $pNRem = 0.3$ establece la cantidad de memoria de la población que no se alterará (MNoR).

El número máximo de iteraciones para que el cuerpo del micro-AG alcance la convergencia nominal es $nTope = 1$

El tamaño del archivo externo $tamPARETO = 200$ es el número de óptimos de Pareto que será el resultado final del micro-AG.

El porcentaje de cruza $Pc = 0.8$ indica el porcentaje de individuos de la población que debe recombinar sus cromosomas.

El porcentaje de mutación $Pm = \left(\frac{1}{bits\ del\ cromosoma} \right)$ indica el porcentaje de alelos del cromosoma que deberán modificarse.

El porcentaje de mutación Knapsack $PmKnapsack = \left(\frac{1}{genes\ del\ cromosoma} \right)$ indica el porcentaje de genes del cromosoma que deberán modificarse.

El valor $subDivs = 25$ indica el número de subdivisiones de la malla adaptativa

El ciclo del segundo elitismo $sndelit = 10$ es el ciclo de reemplazo desde el archivo histórico hacia la malla adaptativa.

El valor $GMax = 24984$ es la condición de paro del micro-AG.

4.3.11 Cambios efectuados al micro-AG para optimización multiobjetivo

Al realizar pruebas en este AEMO utilizando los parámetros indicados en la tabla 4.14 se mostró un comportamiento que no generaba soluciones cercanas al AFPV del modelo (ver sección 4.4.1). En particular no se generaba solución alguna al aplicar aquellos modelos diferentes al MV_FO2, por ejemplo usando restricciones de cardinalidad. Acorde

a las conclusiones indicadas en [62], se verifica el mal comportamiento de este AEMO al aplicar restricciones y la necesidad de mejorar la capacidad del AE para explotar determinadas regiones promisorias del espacio de búsqueda. Por ello, se analizó el código del algoritmo y se propuso una modificación en el algoritmo original de la tabla 4.21.

En el micro-AG original en el paso de Copiar vectores no dominados de P^t a MPo se busca aleatoriamente para cada individuo de P^t , solamente a un individuo con el que se verifica la no-dominancia. Si ésta se cumple como no-dominancia en ambos sentidos, entonces se realiza la actualización en MPo de ese individuo. Si no se cumple, no se realiza acción alguna.

function Micro-AG	
begin	
Generar la población inicial P de tamaño M y guardar su contenido en la memoria de población MPo	MPo de tamaño $tamMem$
/*Ambas porciones de MPo serán llenadas con soluciones aleatorias*/	$pNRem$ indica la proporción no reemplazable de MPo
$i=0$	$pNRem$
while $i < GMax$ do	Se repite $GMax$ veces
begin	
Obtener la población de trabajo (P^t) de MPo	
repeat	
begin	
Aplicar selección por torneo binario basado en no dominancia	
Aplicar cruce de dos puntos y mutación uniforme a los individuos seleccionados	Se utiliza Pc , Pm y $PmKnapsack$
Aplicar elitismo (reteniendo solamente uno de los vectores no dominados)	
Producir la próxima generación	
end repeat	
until convergencia nominal es alcanzada	Se repite $nTope$ veces
Actualizar Controlador-Archivado (vectores no-dominados de P^t)	
Copiar vectores no-dominados de P^t a MPo	/*modificación*/
if $i \bmod$ ciclo de reemplazo	Se aplica cada $sndelit$ iteraciones
then aplicar la segunda forma de elitismo	
$i = i + 1$	
end while	
end function	

Tabla 4.21. Pseudo-código del Micro-AG.

```

function Controlador-Archivado(solución)
begin
  if archivo-externo  $E = \emptyset$ 
  then almacenar solución en  $E$ 
  else if solución domina  $E$ 
    then elimina dominados
    almacenar solución en  $E$ 
  else if solución no es dominada por  $E$ 
    then if  $E$  no esta lleno
      then almacenar solución en  $E$ 
      else almacenar solución en  $E$ 
      actualizar localidades
    else Malla-Adaptativa(solución)
end function

```

Tabla 4.22. Pseudo-código del Controlador-Archivado.

```

function Malla-Adaptativa(solución)
begin
  solución1 =  $x$ ;  $x \in$  la región más poblada  $P$       Se tienen subDivs regiones
  if solución está fuera de rango                      por cada objetivo
  then elimina solución
    almacenar solución en  $E$ 
    actualiza localidades
  else if solución1 en región más poblada que
    solución
    then elimina solución1
    almacenar solución en  $E$ 
    actualiza localidades a la que pertenecía
    solución1 y a la que pertenece solución
end function

```

Tabla 4.23. Pseudo-código de Malla-Adaptativa.

La modificación consiste en localizar primero una posición que P^t domine dentro de MPo . De no existir alguna, como segunda instancia se localiza una posición en la que nadie domine. Determinada esta posición en MPo se copia el individuo de P^t a MPo . Como tercera instancia si el individuo de P^t es dominado por MPo entonces no se copia el individuo de P^t a MPo . Esto evita que individuos de P^t que son dominados por MPo , se introduzcan a MPo , y permite que individuos con igual aptitud (*fitness*) se reemplacen entre sí con el fin de buscar diferentes estructuras de portafolio para aptitudes similares, esto con el fin de evitar que más individuos se ubiquen y dominen una misma región del frente de Pareto, lo que se verificó con las simulaciones realizadas, en especial para los modelos diferentes al MV_FO2.

La implementación del comportamiento del Knapsack binario se realizó en la generación de individuos agregando la alternativa de la mutación a nivel gene como se explica en la sección 4.3.2.

Además, se realizan las modificaciones necesarias para implementar la evaluación de la aptitud de una tercera función objetivo y el manejo de una restricción.

4.4 Métricas de comparación y análisis de Resultados

Las simulaciones se efectuaron utilizando una computadora personal de escritorio con procesador Pentium IV a 1.90GHz y 256MB de RAM, utilizando el sistema operativo Linux Red Hat 7.2.

4.4.1 Aproximación al Frente de Pareto verdadero

Se calculó una aproximación a cada uno de los frentes de Pareto verdaderos (AFPV) para el problema MV_FO2 (con dos funciones objetivo y sin restricciones), para cada escenario de trabajo descrito en la tabla 4.10, utilizando el programa del *Solver* provisto por el *Excel 2000 de Microsoft (9.0.3821 SR-1)*, que se corrió utilizando el sistema operativo Windows XP Home Edition 5.1.2600 Service Pack 2, y aplicando los parámetros indicados en la tabla 4.24⁴⁷.

⁴⁷ Estas características se aplicaron para todos los puntos calculados, excepto para uno de ellos que generó un mejor resultado con *Hallar por: Gradiente conjugado*.

Tiempo	32,367 seg	Asumir no negativos	si
Iteraciones	32,767	Usar escala automática	si
Precisión	0.0001	Mostrar resultado de iteraciones	no
Tolerancia	5 %	Estimación	Cuadrática
Convergencia	0.001	Derivadas	Centrales
Adoptar modelo lineal	no	Hallar por	Newton

Tabla 4.24. Parámetros para ejecución del programa *Solver*.

Los tiempos requeridos para llevar a cabo el cálculo en el caso del escenario de trabajo BMV99-04 fueron:

- Tiempo total de cálculo: *9 horas 57 minutos*.
- Tiempo promedio global para calcular un punto del frente: *5 minutos 37.9 segundos*.
- Tiempo promedio para calcular un punto del frente, considerando solamente las soluciones encontradas utilizando un punto inicial de búsqueda como referencia: *54.7 segundos*.
- Tiempo promedio para calcular un punto del frente, considerando solamente las soluciones encontradas sin utilizar otro punto como referencia: *5 minutos 14.1 segundos*.

En el caso del problema MV_FO3 (con tres funciones objetivo y sin restricciones), el frente de Pareto verdadero utilizado para el análisis de los resultados será el mismo conjunto anteriormente generado para el problema MV_F02, ya que como indican Vedarajan et al. [65] los costos de transacción generan en el plano (rendimiento μ , riesgo σ) bandas que representan varios rangos de costos de transacción, las que se acercan a la frontera eficiente del problema MV_F02, como serán explicadas al analizar los resultados de las pruebas correspondientes.

Fieldsend et al. [22] realizan una comparación de las fronteras eficientes (frentes de Pareto) que se generan al aplicar o no, restricciones de cardinalidad al MV, concluyendo que la frontera eficiente sin restricciones y las fronteras eficientes para portafolios con restricciones de cardinalidad, varían muy poco entre sí (excepto para niveles bajos de riesgo), ya que las fronteras para el MV con restricciones se acercan rápidamente a la frontera del MV sin restricciones conforme aumenta el número de restricciones k . En con-

sideración a lo anterior el frente de Pareto real utilizado para el análisis de los resultados para los problemas MV_FO2_CC4, MV_FO2_CC8, MV_FO2_CC12, MV_FO2_CC26 y MV_FO3_CC4, MV_FO3_CC8, MV_FO3_CC12, MV_FO3_CC26 será el mismo conjunto anteriormente generado para el problema MV_F02.

4.4.2 Comparación cuantitativa del desempeño de los AEMO

Para validar el desempeño de los AEMO, se efectúa una comparación cuantitativa utilizando cuatro métricas tomadas de la literatura especializada [9] y dos nuevas métricas propuestas para este documento.

Las métricas se fundamentan en las definiciones del *Conjunto de Óptimos de Pareto* (P_{true}) y del *Frente de Pareto* (FP_{true}) descritas por las ecuaciones (1.7) y (1.8) respectivamente, dentro del sección 1.5.2 *Optimización multiobjetivo*.

Métrica de conteo exitoso (*SC: Success Counting*)

Consiste en determinar aquellos puntos del frente de Pareto generado (X_g) que pertenecen al frente de Pareto verdadero (X_v), y contarlos. Se define como:

$$SC(X_v, X_g) \triangleq |\{x \in X_g \mid x \in X_v \text{ y } \neg \exists x' \in X_v \quad f(x') \preceq f(x)\}| \quad (4.35)$$

Un resultado de 0 indica que ambos frentes son totalmente diferentes; cualquier otro valor lejano a 0 indica que más puntos de X_g pertenecen o dominan a X_v ; por ello es deseable obtener valores altos de *SC*.

Esta métrica no mide la extensión de X_g sobre el frente verdadero X_v .

Métrica de conteo exitoso invertido (*ISC: Inverted Success Counting*)

Propuesta. Consiste en determinar aquellos puntos del frente de Pareto verdadero (X_v) que pertenecen al frente de Pareto generado (X_g), y contarlos. Se define como:

$$ISC(X_v, X_g) \triangleq |\{x \in X_v \mid x \in X_g \text{ y } \neg \exists x' \in X_g \quad f(x') \preceq f(x)\}| \quad (4.36)$$

Un resultado de 0 indica que ambos frentes son totalmente diferentes; cualquier otro valor lejano a 0 indica que más puntos de X_v pertenecen o dominan a X_g ; por ello es deseable obtener valores bajos de *ISC*.

Esta métrica no mide la extensión del frente verdadero X_v sobre X_g .

Métrica de distancia generacional invertida (*IGD: Inverted Generational Distance*)

Consiste en determinar para cada punto del frente de Pareto el punto de la solución que le es más cercano y sumar estas distancias para obtener en promedio, que tan lejos está el frente de Pareto verdadero (FP_v) del frente de Pareto generado (FP_g). Se define como:

$$IGD \triangleq \frac{\left(\sum_{i=1}^n d_i^p \right)^{1/p}}{n} \quad (4.37)$$

donde: n es el número de vectores en el frente de Pareto verdadero FP_v , p es igual a 2, y d_i es la distancia Euclidiana (en el espacio de los objetivos) entre cada vector de FP_v y el punto más cercano del FP_g .

Un resultado de 0 indica que ambos frentes son iguales; cualquier otro valor indica una divergencia entre ambos frentes; por ello es deseable obtener valores bajos de IGD .

Métrica de cobertura de dos conjuntos (*TSC: Two Set Coverage*)

Compara la cobertura relativa entre dos conjuntos. Considera a $X', X'' \subseteq X'$ como dos conjuntos de vectores con valores del fenotipo. Se define como el mapeo del par ordenado (X', X'') al intervalo $[0, 1]$ como sigue:

$$TSC(X', X'') \triangleq \frac{|\{a'' \in X''; \exists a' \in X' : a' \succeq a''\}|}{|X''|} \quad (4.38)$$

Si todos los puntos de X' dominan o son iguales a todos los puntos en X'' , entonces por definición $TSC = 1$. Se puede considerar a uno de los conjuntos X como el frente de Pareto verdadero. Es fácil de calcular y provee una comparación relativa basada en la dominancia entre los conjuntos.

Esta métrica no mide qué tan cercanos están ambos conjuntos.

Métrica del espacio distribuido de Schott (*SS: Spread Schott*)

Muestra qué tan bien se ha distribuido el frente de Pareto generado (FP_g) sobre el espacio que ocupa. Se define como:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{d} - d_i)^2} \quad (4.39)$$

donde: $d_i = \min(|f_1^i(x) - f_1^j(\bar{x})|) + \min(|f_2^i(x) - f_2^j(\bar{x})|) \quad i, j = 1, \dots, n$; \bar{d} es el promedio de las n ocurrencias de d_i ; y n es el número de vectores en FP_g .

Un valor de 0 en esta métrica significa que todos los miembros de FP_g son espacialmente equidistantes; por ello es deseable obtener valores bajos de SS .

Esta métrica presenta el problema de que no mide la extensión de FP_g sobre el frente verdadero FP_v , además de que no considera a este último en su definición, por lo que un FP_g puede estar bien distribuido, pero estar lejano de FP_v .

Métrica de contribución al frente (*PaCo: Pareto contribution*)

Propuesta. Teniendo varios frentes de Pareto generados X_g como soluciones para un problema, se propone medir la contribución de cada frente al frente de Pareto verdadero X_v . Para ello se verifica la no-dominancia prevaleciente al unir el conjunto que forman $\{X_{gi}\}$ con el frente de Pareto verdadero X_v . Se define como:

$$\{X_{gi}\} \cup X_v = U \quad (4.40)$$

donde $i = 1, \dots, m$ para m frentes de Pareto generados X_g

$$F = \{x \in U \mid \neg \exists x' \in U \quad f(x') \preceq f(x)\} \quad (4.41)$$

$$F_i = \{x \in F \mid x \in X_{gi}\} \quad (4.42)$$

$$|F| = \sum_{i=1}^m |F_i| \quad (4.43)$$

Esto constituye un frente total F a partir de todos los frentes disponibles, por lo que mide en cuánto contribuye cada X_g sobre F para igualar o mejorar X_v .

4.4.3 Plan de pruebas y su desarrollo

Se establecieron todas las combinaciones posibles para el desarrollo de las pruebas, las cuales se describen en la figura 4.16. Los resultados obtenidos se detallan a continuación mediante tablas de tiempos de proceso, tablas de resultados de las métricas de comparación, y un análisis y graficación de resultados (desde el punto de vista computacional y financiero). En las tablas se utilizan las siglas: **NA** para indicar que No es Aplicable, **AFPV** para indicar la aproximación al frente de Pareto verdadero, y **FPG** para nombrar al frente de Pareto generado utilizando los AEMO.

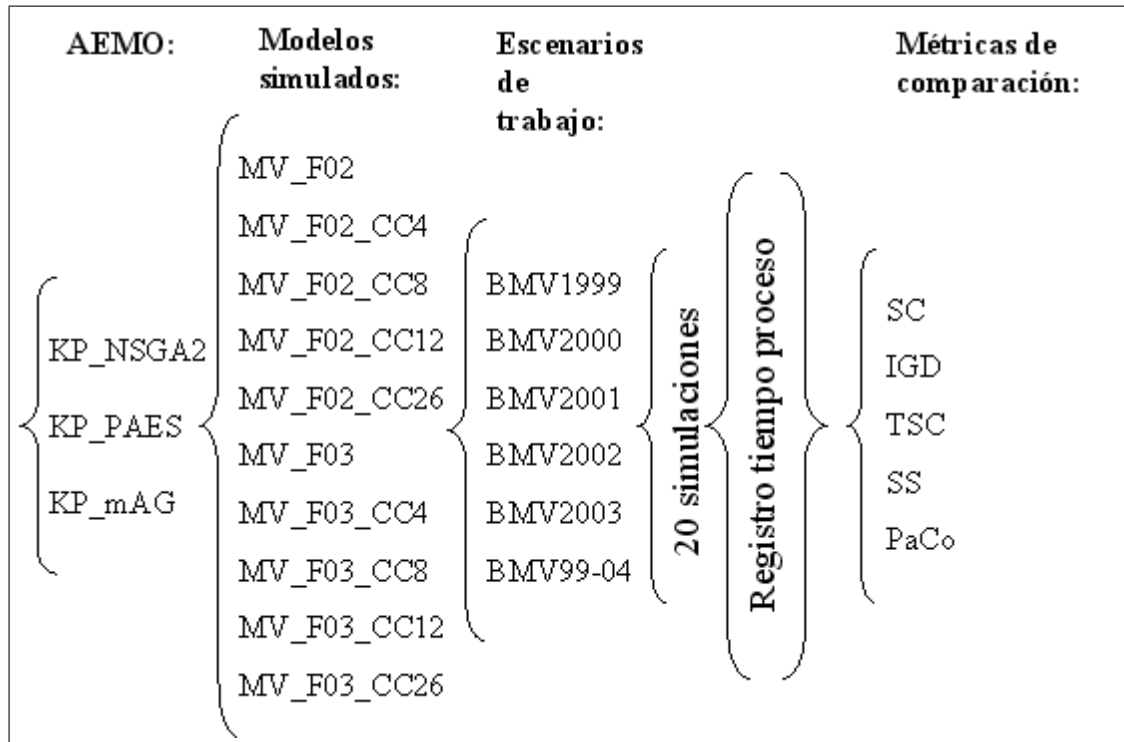


Fig. 4.16. Combinaciones AEMO-modelo-escenario-métricas.

4.4.4 Comentarios acerca de los tiempos de ejecución

En todas las simulaciones se verifica que en los modelos sin restricciones MV_F02 y MV_F03, el orden de menor a mayor tiempo de ejecución es: **KP_mGA**, KP_NSGA2 y KP_PAES.

Y para los modelos con restricciones MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12, MV_F02_CC26, MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12 y MV_F03_CC26, el orden de menor a mayor tiempo de ejecución es: **KP_NSGA2**, KP_PAES y KP_mGA. Consultar el Apéndice C para ver los resultados en detalle.

4.4.5 Análisis de los tiempos de ejecución

Calculando para cada AEMO y para cada modelo, el promedio (de los seis espacios de trabajo) de la proporción de los valores de la *media* del KP_mAG y el KP_PAES, toman-

do como referencia el KP_NSGA2, se obtienen los valores de las proporciones de tiempo indicados en las tablas 4.25 y 4.26. En ellos se puede observar lo siguiente:

1. **KP_mAG** es el AEMO más rápido para los modelos que no consideran restricciones.
2. **KP_NSGA2** es el AEMO más rápido para los modelos que sí consideran restricciones.
3. KP_mAG tiene la proporción mayor (14 a 1, o más) de tiempo en los modelos con restricciones, con respecto al KP_NSGA2.

Utilizando el promedio de los valores de la *media* de los seis espacios de trabajo para cada AEMO y para cada modelo, se obtienen los tiempos de ejecución promedio indicados en las tablas 4.27 y 4.28. En ellos se puede observar lo siguiente:

1. Para el caso de los modelos con restricciones, el **KP_NSGA2** es el AEMO con la menor desviación estándar, y por ello sus tiempos de ejecución parecen más estables.
2. En KP_mAG aumenta el tiempo de proceso en relación directa al valor de la restricción.

	MV_F02	MV_F02_CC4	MV_F02_CC8	MV_F02_CC12	MV_F02_CC26
KP_mAG	0.34	14.60	15.06	15.32	21.16
KP_PAES	1.75	2.40	2.36	2.44	1.99
KP_NSGA2	1	1	1	1	1

Tabla 4.25. Proporción de los tiempos con respecto al KP_NSGA2.

	MV_F03	MV_F03_CC4	MV_F03_CC8	MV_F03_CC12	MV_F03_CC26
KP_mAG	0.42	14.86	15.28	16.26	27.58
KP_PAES	2.12	4.83	4.77	4.71	3.23
KP_NSGA2	1	1	1	1	1

Tabla 4.26. Proporción de los tiempos con respecto al KP_NSGA2.

	MV_F02	MV_F02_CC4	MV_F02_CC8	MV_F02_CC12	MV_F02_CC26	desv.e. CC.
KP_mAG	20.02	853.11	881.88	897.87	1243.90	184.072
KP_PAES	104.04	140.10	138.08	142.93	116.84	11.930
KP_NSGA2	59.33	58.44	58.56	58.59	58.78	0.142

Tabla 4.27. Tiempos promedio.

	MV_F03	MV_F03_CC4	MV_F03_CC8	MV_F03_CC12	MV_F03_CC26	desv.e. CC.
KP_mAG	25.73	887.66	921.46	971.90	1664.64	370.434
KP_PAES	129.43	288.33	287.73	281.22	194.65	45.666
KP_NSGA2	61.04	59.72	60.31	59.78	60.35	0.338

Tabla 4.28. Tiempos promedio.

4.4.6 Comentarios acerca de la Métrica de conteo exitoso (SC: *Success Counting*) y la Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: *Inverted Success Counting*)

Se establece el orden de desempeño de los AEMO según las métricas SC e ISC. Para ello se consideran los valores de la media y la mediana, donde el mayor valor de SC y el menor valor de ISC, son los mejores valores u óptimos. Consultar el Apéndice C para mayores detalles.

MV_F02

- El mejor valor medio de SC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2002 donde KP_PAES tiene un mejor valor medio, y para el año 99-04 donde los tres AEMO tienen un SC con todos los valores medio en 0.
- El SC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del SC.
- El mejor valor medio de ISC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.
- El ISC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio de ISC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.29.

MV_F02	SC	ISC
1	KP_NSGA2	KP_NSGA2
2	KP_mAG, KP_PAES	KP_PAES
3		KP_mAG

Tabla 4.29. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F02.

MV_F02_CC4

- El mejor valor medio de SC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.
- El SC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del SC.
- El mejor valor medio de ISC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2003 donde el KP_PAES tiene un mejor valor medio.
- El ISC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ISC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.30.

MV_F02_CC4	SC	ISC
1	KP_NSGA2	KP_NSGA2
2	KP_PAES, KP_mAG	KP_PAES
3		KP_mAG

Tabla 4.30. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F02_CC4.

MV_F02_CC8

- El mejor valor medio de SC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2002 donde KP_mAG tiene un mejor valor medio.
- El mejor valor de la mediana de SC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2001 y 99-04 donde los tres AEMO tienen un SC con todos los valores de la mediana en 0.
- El mejor valor medio de ISC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_PAES, excepto para el año 2000 donde el KP_NSGA2 tiene un mejor valor medio.
- El mejor valor de la mediana de ISC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_PAES, excepto para el año 2001 donde el KP_NSGA2 tiene igual valor mediana.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.31.

MV_F02_CC8	SC	ISC
1	KP_NSGA2	KP_PAES
2	KP_mAG, KP_PAES	KP_NSGA2
3		KP_mAG

Tabla 4.31. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F02_CC8.

MV_F02_CC12

- El mejor valor medio de SC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 99-04 donde los tres AEMO tienen un SC con todos los valores medio en 0.

- El mejor valor de la mediana de SC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2001 y 99-04 donde los tres AEMO tienen un SC con todos los valores de la mediana en 0.
- El mejor valor medio de ISC para todos de los espacios de trabajo lo tiene el KP_PAES.
- El ISC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ISC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.32.

MV_F02_CC12	SC	ISC
1	KP_NSGA2	KP_PAES
2	KP_mAG, KP_PAES	KP_mAG
3		KP_NSGA2

Tabla 4.32. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F02_CC12.

MV_F02_CC26

Todos los archivos de KP_PAES para este modelo resultaron vacíos, lo cual no permite evaluar el SC e ISC del KP_PAES.

- El mejor valor medio de SC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2001 y 99-04 donde los dos AEMO tienen un SC con todos los valores medio en 0.
- El mejor valor de la mediana de SC para tres espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, y para los años 1999, 2001 y 99-04 los dos AEMO tienen un SC con todos los valores de la mediana en 0.
- El mejor valor medio de ISC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.
- El ISC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ISC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.33.

MV_F02_CC26	SC	ISC
1	KP_NSGA2	KP_mAG
2	KP_mAG, KP_PAES	KP_NSGA2
3		KP_PAES

Tabla 4.33. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F02_CC26.

MV_F03

- Para todos los años y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de SC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ISC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para los años 2002 y 99-04 donde el KP_PAES tiene un mejor valor medio.
- El ISC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ISC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.34.

MV_F03	SC	ISC
1	KP_NSGA2, KP_mAG, KP_PAES	KP_mAG
2		KP_NSGA2
3		KP_PAES

Tabla 4.34. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03.

MV_F03_CC4

- Para todos los espacios de trabajo y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de SC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ISC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_PAES.
- El ISC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ISC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.35.

MV_F03_CC4	SC	ISC
1	KP_PAES, KP_NSGA2, KP_mAG	KP_PAES
2		KP_NSGA2
3		KP_mAG

Tabla 4.35. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03_CC4.

MV_F03_CC8

- Para todos los espacios de trabajo y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de SC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ISC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para el año 2002 donde es mejor el valor medio del KP_PAES.
- El ISC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ISC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.36.

MV_F03_CC8	SC	ISC
1	KP_NSGA2, KP_mAG, KP_PAES	KP_mAG
2		KP_NSGA2
3		KP_PAES

Tabla 4.36. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03_CC8.

MV_F03_CC12

- Para todos los espacios de trabajo y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de SC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ISC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.
- El ISC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ISC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.37.

MV_F03_CC12	SC	ISC
1	KP_NSGA2, KP_mAG, KP_PAES	KP_mAG
2		KP_NSGA2
3		KP_PAES

Tabla 4.37. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03_CC12.

MV_F03_CC26

- Para todos los espacios de trabajo y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de SC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ISC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para el año 2002 donde KP_PAES tiene un mejor valor medio.
- El mejor o igual valor de la mediana de ISC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SC e ISC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.38.

MV_F03_CC26	SC	ISC
1	KP_NSGA2, KP_mAG, KP_PAES	KP_mAG
2		KP_PAES
3		KP_NSGA2

Tabla 4.38. Medición del desempeño con SC e ISC. MV_F03_CC26.

4.4.7 Análisis de los resultados acerca de la Métrica de conteo exitoso (SC: *Success Counting*) y la Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: *Inverted Success Counting*)

1. Con respecto a la funcionalidad de las métricas:
 - a) El SC y el ISC se fundamentan en una comparación del frente de Pareto generado (FPG) versus el frente de Pareto verdadero (FPV). Para el problema del MV se crearon aproximaciones al FPV (AFPV)⁴⁸. Estas aproximaciones no representan a todos los puntos disponibles para cada frente, por lo que la medición del desempeño a través del SC e ISC sólo debe contemplarse desde el punto de vista del frente parcial comparado. En este sentido, se pueden obtener valores no óptimos de SC e ISC, y sin embargo tener puntos del FPG no-dominados en ambos sentidos con respecto al AFPV, lo cual quiere decir que un valor bajo de SC o un valor alto de ISC (SC e ISC no óptimos), sólo mide la ausencia de puntos del AFPV en el FPG, sin indicar con ello que los puntos del FPG sean dominados por el AFPV, más bien son otros puntos del FPV que no están incluidos en el AFPV.
 - b) Las pruebas realizadas muestran que el KP_PAES al simular el modelo KP_F02_CC26 genera soluciones con archivos vacíos, y el mismo KP_PAES para los otros modelos genera varias soluciones con algunos archivos vacíos. Esta si-

⁴⁸ Esto debido a que precisamente forma parte de la propuesta de solución de esta tesis, el obtener más fácilmente estos frentes, y generar aquéllos que actualmente no es posible crear mediante otros medios.

tuación promueve la obtención de valores de 0 para el SC, y tales valores de 0 no permiten determinar el desempeño de los AEMO comparados utilizando el SC.

- c) El ISC muestra valores para los casos donde el SC obtiene valores de 0, por lo que el ISC posee más elementos de comparación del desempeño, para los casos donde el SC obtiene valores de 0.

2. Con respecto a las mediciones del desempeño de los AEMO:

- a) Para el modelo sin restricciones MV_F02, SC e ISC coinciden en determinar al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
- b) Para los modelos con restricciones MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12 y MV_F02_CC26, SC coincide en establecer al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño, y el ISC no puede coincidir en un AEMO con el mejor desempeño.
- c) Para el modelo sin restricciones MV_F03, SC no puede coincidir a un AEMO con mejor desempeño. El ISC coincide en determinar al **KP_mAG** como el AEMO con mejor desempeño.
- d) Para los modelos con restricciones MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12 y MV_F03_CC26, SC no puede establecer a un AEMO con el mejor desempeño, e ISC coincide en 3 de los cuatro modelos en establecer al **KP_mAG** como el AEMO con mejor desempeño.

4.4.8 Comentarios acerca de la Métrica de distancia generacional invertida (*IGD: Inverted Generational Distance*)

Se establece el orden de desempeño de los AEMO según la métrica IGD. Para ello se consideran los valores de la media y la mediana, donde el menor valor de IGD, es el mejor valor u óptimo. Consultar el Apéndice C para mayores detalles.

MV_F02

- El mejor valor medio de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.

- El mejor valor de la mediana de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.39.

MV_F02	IGD
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.39. Medición del desempeño con IGD. MV_F02.

MV_F02_CC4

- El mejor valor medio de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.40.

MV_F02_CC4	IGD
1	KP_NSGA2
2	KP_PAES, KP_mAG
3	

Tabla 4.40. Medición del desempeño con IGD. MV_F02_CC4.

MV_F02_CC8

- El mejor valor medio de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.

- El mejor valor de la mediana de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.41.

MV_F02_CC8	IGD
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.41. Medición del desempeño con IGD. MV_F02_CC8.

MV_F02_CC12

- El mejor valor medio de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.42.

MV_F02_CC12	IGD
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.42. Medición del desempeño con IGD. MV_F02_CC12.

MV_F02_CC26

Todos los archivos de KP_PAES para este modelo resultaron vacíos, lo cual no permite evaluar el IGD del KP_PAES.

- El mejor valor medio de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.

- El mejor valor de la mediana de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.43.

MV_F02_CC26.	IGD
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG, KP_PAES
3	

Tabla 4.43. Medición del desempeño con IGD. MV_F02_CC26.

MV_F03

- El mejor valor medio de IGD para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para los años 2002 y 99-04 donde el KP_NSGA2 tiene un mejor valor medio.
- En tres espacios de trabajo el KP_NSGA2 tiene el mejor valor de la mediana de IGD y en los otros tres casos tiene mejor valor de la mediana de IGD el KP_mAG.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.44.

MV_F03	IGD
1	KP_mAG, KP_NSGA2
2	
3	KP_PAES

Tabla 4.44. Medición del desempeño con IGD. MV_F03.

MV_F03_CC4

- El mejor valor medio de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de IGD para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2000 y 2001 donde el KP_mAG tiene un mejor valor medio.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.45.

MV_F03_CC4	IGD
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.45. Medición del desempeño con IGD. MV_F03_CC4.

MV_F03_CC8

- El mejor valor medio de IGD para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para el año 2002 donde el KP_NSGA2 tiene un menor valor medio.
- El mejor valor de la mediana de IGD para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para el año 2002 donde el KP_NSGA2 tiene un mejor valor medio.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.46.

MV_F03_CC12

- El mejor valor medio de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.

MV_F03_CC8	IGD
1	KP_mAG
2	KP_NSGA2
3	KP_PAES

Tabla 4.46. Medición del desempeño con IGD. MV_F03_CC8.

- El mejor valor de la mediana de IGD para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.47.

MV_F03_CC12	IGD
1	KP_mAG
2	KP_NSGA2
3	KP_PAES

Tabla 4.47. Medición del desempeño con IGD. MV_F03_CC12.

MV_F03_CC26

- El mejor valor medio de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.
- El mejor valor de la mediana de IGD para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con IGD se tiene de la forma indicada en la tabla 4.48.

MV_F03_CC26	IGD
1	KP_mAG
2	KP_NSGA2
3	KP_PAES

Tabla 4.48. Medición del desempeño con IGD. MV_F03_CC26.

4.4.9 Análisis de los resultados acerca de la Métrica de distancia generacional invertida (*IGD: Inverted Generational Distance*)

1. Con respecto a la funcionalidad de la métrica:
 - a) El IGD se fundamenta en la medición de la cercanía del frente de Pareto generado (FPG) versus el frente de Pareto verdadero (FPV). Para el problema del MV se crearon aproximaciones al FPV (AFPV). Estas aproximaciones no representan a todos los puntos disponibles para cada frente, por lo que la medición del desempeño a través del IGD sólo debe contemplarse desde el punto de vista del frente parcial comparado. En este sentido, se pueden obtener valores no óptimos de IGD, y sin embargo tener puntos del FPG no-dominados con respecto a las AFPV, lo cual quiere decir que un valor alto de IGD mide la lejanía de los puntos del FPG con respecto a las AFPV, sin indicar con ello que los puntos del FPG sean dominados por el AFPV, más bien son otros o mejores puntos del FPV que no están incluidos en el AFPV.
 - b) Las pruebas realizadas muestran que el KP_PAES al simular el modelo KP_F02_CC26 genera soluciones con archivos vacíos; esta situación no permite aplicar el IGD. El mismo KP_PAES para los otros modelos genera varias soluciones con algunos archivos vacíos, los cuales deben ser ignorados con la finalidad de calcular el IGD.
2. Con respecto a las mediciones del desempeño de los AEMO:
 - a) Para el modelo sin restricciones MV_F02, IGD determina al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
 - b) Para los modelos con restricciones MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12 y MV_F02_CC26, IGD establece al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
 - c) Para el modelo sin restricciones MV_F03, IGD determina al **KP_mAG** y al **KP_NSGA2** como los AEMO con mejor desempeño.
 - d) Para los modelos con restricciones MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12 y MV_F03_CC26, IGD establece como el AEMO con el mejor

desempeño al **KP_mAG** (en tres de estos modelos, y al **KP_NSGA2** solamente en un caso).

4.4.10 Comentarios acerca de la Métrica de cobertura de dos conjuntos (*TSC: Two Set Coverage*)

Se utiliza el TSC en dos sentidos, primero cuando se mide cuánto cubre FPG al AFPV (o cuánto del AFPV es dominado por el FPG) nombrado TSC, y segundo para medir cuánto cubre AFPV al FPG (o cuánto del FPG es dominado por el AFPV) nombrado ITSC.

Se establece el orden de desempeño de los AEMO según la métrica TSC en sus dos sentidos: TSC e ITSC. Para ello se consideran los valores de la media y la mediana, donde el mayor valor de TSC y el menor valor de ITSC, son los mejores valores u óptimos. Consultar el Apéndice C para mayores detalles.

MV_F02

- El mejor valor medio de TSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el **KP_NSGA2**, excepto para el año 99-04 donde los tres AEMO tienen un TSC con todos los valores medio en 0.
- El mejor valor de la mediana de TSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el **KP_NSGA2**, excepto para el año 1999 donde **KP_mAG** tiene el mismo valor de la mediana, y para los años 2002 y 99-04 donde los tres AEMO tienen los mismos valores de la mediana.
- El mejor valor medio de ITSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el **KP_NSGA2**.
- El ITSC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio de ITSC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.49.

MV_F02	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2	KP_NSGA2
2	KP_mAG, KP_PAES	KP_PAES
3		KP_mAG

Tabla 4.49. Medición del desempeño con TSC. MV_F02.

MV_F02_CC4

- El mejor valor medio de TSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de TSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2001 y 99-04 donde los tres AEMO tienen el mismo valor de la mediana de 0.
- El mejor valor medio de ITSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2003 donde el KP_PAES tiene un mejor valor medio.
- El ITSC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio de ITSC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.50.

MV_F02_CC4	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2	KP_NSGA2
2	KP_PAES, KP_mAG	KP_PAES
3		KP_mAG

Tabla 4.50. Medición del desempeño con TSC. MV_F02_CC4.

MV_F02_CC8

- El mejor valor medio de TSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

- El mejor valor de la mediana de TSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2001 y 99-04 donde los tres AEMO tienen un TSC con todos los valores de la mediana en 0.
- El mejor valor medio de ITSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de ITSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.51.

MV_F02_CC8	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2	KP_NSGA2
2	KP_mAG, KP_PAES	KP_mAG
3		KP_PAES

Tabla 4.51. Medición del desempeño con TSC. MV_F02_CC8.

MV_F02_CC12

- El mejor valor medio de TSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 99-04 donde los tres AEMO tienen un TSC con todos los valores medio en 0.
- El mejor valor de la mediana de TSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2001 y 99-04 donde los tres AEMO tienen un TSC con todos los valores de la mediana en 0.
- El mejor valor medio de ITSC para todos de los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

- El mejor valor de la mediana de ITSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2002 donde el KP_PAES tiene un mejor valor de la mediana.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.52.

MV_F02_CC12	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2	KP_NSGA2
2	KP_mAG, KP_PAES	KP_mAG
3		KP_PAES

Tabla 4.52. Medición del desempeño con TSC. MV_F02_CC12.

MV_F02_CC26

Todos los archivos de KP_PAES para este modelo resultaron vacíos, lo cual no permite evaluar el TSC e ITSC del KP_PAES.

- El mejor valor medio de TSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2001 y 99-04 donde los dos AEMO tienen un TSC con todos los valores medio en 0.
- El mejor valor de la mediana de TSC para tres espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, y para los años 1999, 2001 y 99-04 los dos AEMO tienen un TSC con todos los valores de la mediana en 0.
- El mejor valor medio de ITSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.
- El ITSC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ITSC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.53.

MV_F02_CC26	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2	KP_NSGA2
2	KP_mAG, KP_PAES	KP_mAG, KP_PAES
3		

Tabla 4.53. Medición del desempeño con TSC. MV_F02_CC26.

MV_F03

- Para todos los años y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de TSC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ITSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2002 donde el KP_PAES tiene un mejor valor medio.
- El ITSC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ITSC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.54.

MV_F03	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2, KP_mAG, KP_PAES	KP_NSGA2
2		KP_PAES
3		KP_mAG

Tabla 4.54. Medición del desempeño con TSC. MV_F03.

MV_F03_CC4

- Para todos los espacios de trabajo y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de TSC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ITSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

- El mejor valor de la mediana de ITSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2002 donde el KP_PAES tiene un mejor valor de la mediana.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.55.

MV_F03_CC4	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_PAES, KP_NSGA2, KP_mAG	KP_NSGA2
2		KP_PAES
3		KP_mAG

Tabla 4.55. Medición del desempeño con TSC. MV_F03_CC4.

MV_F03_CC8

- Para todos los espacios de trabajo y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de TSC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ITSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.
- El ITSC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ITSC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.56.

MV_F03_CC8	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2, KP_mAG, KP_PAES	KP_NSGA2
2		KP_PAES
3		KP_mAG

Tabla 4.56. Medición del desempeño con TSC. MV_F03_CC8.

MV_F03_CC12

- Para todos los espacios de trabajo y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de TSC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ITSC para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2002 donde el KP_PAES tiene un mejor valor medio.
- El ITSC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ITSC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.57.

MV_F03_CC12	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2, KP_mAG, KP_PAES	KP_NSGA2
2		KP_mAG, KP_PAES
3		

Tabla 4.57. Medición del desempeño con TSC. MV_F03_CC12.

MV_F03_CC26

- Para todos los espacios de trabajo y todos los modelos, todos los valores de la media y la mediana de TSC resultaron en 0.
- El mejor valor medio de ITSC para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.
- El ITSC con respecto al valor de la mediana se comporta igual que el valor medio del ITSC.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con TSC e ITSC se tiene de la forma indicada en la tabla 4.58.

MV_F03_CC26	TSC AFPV dom por FPG	ITSC FPG dom por AFPV
1	KP_NSGA2, KP_mAG, KP_PAES	KP_NSGA2
2		KP_mAG, KP_PAES
3		

Tabla 4.58. Medición del desempeño con TSC. MV_F03_CC26.

4.4.11 Análisis de los resultados acerca de la Métrica de cobertura de dos conjuntos (*TSC: Two Set Coverage*)

1. Con respecto a la funcionalidad de las métricas:
 - a) El TSC y el ITSC se fundamentan en una comparación del frente de Pareto generado (FPG) versus el frente de Pareto verdadero (FPV). Para el problema del MV se crearon aproximaciones al FPV (AFPV). Estas aproximaciones no representan a todos los puntos disponibles para cada frente, por lo que la medición del desempeño a través del TSC e ITSC sólo debe contemplarse desde el punto de vista del frente parcial comparado. En este sentido, se pueden obtener valores no óptimos de TSC e ITSC, y sin embargo tener puntos del FPG no-dominados en ambos sentidos con respecto al AFPV, lo cual quiere decir que un valor bajo de TSC o un valor alto de ITSC (TSC e ITSC no óptimos), sólo mide la ausencia de puntos del AFPV en el FPG, sin indicar con ello que los puntos del FPG sean dominados por el AFPV, más bien son otros puntos del FPV que no están incluidos en el AFPV.
 - b) Las pruebas realizadas muestran que el KP_PAES al simular el modelo KP_F02_CC26 genera soluciones con archivos vacíos, y el mismo KP_PAES para los otros modelos genera varias soluciones con algunos archivos vacíos. Esta situación promueve la obtención de valores de 0 para el TSC, y tales valores de 0 no permiten determinar el desempeño de los AEMO comparados utilizando el TSC.
 - c) El ITSC muestra valores para los casos donde el TSC obtiene valores de 0, por lo que el ITSC posee más elementos de comparación del desempeño, para los casos donde el TSC obtiene valores de 0.
2. Con respecto a las mediciones del desempeño de los AEMO:

- a) Para el modelo sin restricciones MV_F02, TSC no puede determinar un AEMO con el mejor desempeño, e ITSC coincide en determinar al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
- b) Para los modelos con restricciones MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12 y MV_F02_CC26, TSC e ITSC coinciden en establecer al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
- c) Para el modelo sin restricciones MV_F03, TSC no puede establecer a un AEMO con mejor desempeño. El ITSC coincide en determinar al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
- d) Para los modelos con restricciones MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12 y MV_F03_CC26, TSC no puede establecer a un AEMO con el mejor desempeño, e ITSC coincide en establecer al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.

4.4.12 Comentarios acerca de la Métrica del espacio distribuido de Schott (*SS: Spread Schott*)

Se establece el orden de desempeño de los AEMO según la métrica SS. Para ello se consideran los valores de la media y la mediana, donde el menor valor de SS, es el mejor valor u óptimo. Consultar el Apéndice C para mayores detalles.

MV_F02

- El mejor valor medio de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.59.

MV_F02	SS
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.59. Medición del desempeño con SS. MV_F02.

MV_F02_CC4

- El mejor valor medio de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.60.

MV_F02_CC4	SS
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.60. Medición del desempeño con SS. MV_F02_CC4.

MV_F02_CC8

- El mejor valor medio de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.61.

MV_F02_CC8	SS
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.61. Medición del desempeño con SS. MV_F02_CC8.

MV_F02_CC12

- El mejor valor medio de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene KP_NSGA2.
- El mejor valor de la mediana de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.62.

MV_F02_CC12	SS
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.62. Medición del desempeño con SS. MV_F02_CC12.

MV_F02_CC26

Todos los archivos de KP_PAES para este modelo resultaron vacíos, lo cual no permite evaluar el SS del KP_PAES.

- El mejor valor medio de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2002 y 99-04 donde el KP_mAG tiene mejor valor medio.
- El mejor valor de la mediana de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para los años 1999 y 2000 donde el KP_NSGA2 tiene mejor valor de la mediana.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.63.

MV_F02_CC26.	SS
1	KP_NSGA2, KP_mAG
2	
3	KP_PAES

Tabla 4.63. Medición del desempeño con SS. MV_F02_CC26.

MV_F03

- El mejor valor medio de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_PAES, excepto para el año 1999 donde el KP_mAG tiene un mejor valor medio.
- El mejor valor de la mediana de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_PAES, excepto para el año 1999 donde el KP_mAG tiene un mejor valor de la mediana.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.64.

MV_F03	SS
1	KP_PAES
2	KP_mAG
3	KP_NSGA2

Tabla 4.64. Medición del desempeño con SS. MV_F03.

MV_F03_CC4

- El mejor valor medio de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2002 donde el KP_mAG tiene un mejor valor medio.
- El mejor valor de la mediana de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para el año 2002 donde el KP_mAG tiene un mejor valor de la mediana.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.65.

MV_F03_CC4	SS
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.65. Medición del desempeño con SS. MV_F03_CC4.

MV_F03_CC8

- El mejor valor medio de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2, excepto para los años 2002 y 99-04 donde el KP_mAG tiene un menor valor medio.
- El mejor valor de la mediana de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para los años 2002 y 99-04 donde el KP_mAG tiene un menor valor de la mediana.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.66.

MV_F03_CC8	SS
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.66. Medición del desempeño con SS. MV_F03_CC8.

MV_F03_CC12

- El mejor valor medio de SS para casi todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, excepto para los años 1999 y 2003 donde el KP_NSGA2 tiene un mejor valor medio.
- El mejor valor de la mediana de SS para tres espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG, y para los otros tres espacios de trabajo lo tiene el KP_NSGA2.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.67.

MV_F03_CC12	SS
1	KP_NSGA2, KP_mAG
2	
3	KP_PAES

Tabla 4.67. Medición del desempeño con SS. MV_F03_CC12.

MV_F03_CC26

- El mejor valor medio de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.
- El mejor valor de la mediana de SS para todos los espacios de trabajo lo tiene el KP_mAG.

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con SS se tiene de la forma indicada en la tabla 4.68.

MV_F03_CC26	SS
1	KP_mAG
2	KP_NSGA2
3	KP_PAES

Tabla 4.68. Medición del desempeño con SS. MV_F03_CC26.

4.4.13 Análisis de los resultados acerca de la Métrica del espacio distribuido de Schott (*SS: Spread Schott*)

1. Con respecto a la funcionalidad de la métrica:
 - a) El SS se fundamenta en la medición de la distribución de los puntos sobre el frente de Pareto generado (FPG), sin considerar el frente de Pareto verdadero (FPV). En este sentido, se pueden obtener valores óptimos de SS, y sin embargo esto solamente indica la medición de una parte del FPV, lo cual quiere decir que un valor bajo de SS mide la distribución equilibrada de los puntos del FPG con respecto a sí mismo, sin indicar con ello que los puntos del FPG consideren a todo el FPV, por lo que pueden existir otros o mejores puntos del FPV que no están incluidos en el FPG. Un ejemplo de ello lo muestra el KP_PAES, ya que para algunos modelos genera archivos con pocos puntos del FPG, lo cual promueve que se obtengan valores óptimos de SS sobre un FPG demasiado pequeño con respecto al FPV.
 - b) Las pruebas realizadas muestran que el KP_PAES al simular el modelo KP_F02_CC26 genera soluciones con archivos vacíos; esta situación no permite aplicar el SS. El mismo KP_PAES para los otros modelos genera varias soluciones con algunos archivos vacíos, los cuales deben ser ignorados con la finalidad de calcular el SS. También el KP_PAES en otros modelos genera soluciones con algunos archivos no vacíos, pero que contienen un solo punto; esta situación no permite aplicar el SS, ya que al menos se requiere de dos puntos para calcular la SS.
2. Con respecto a las mediciones del desempeño de los AEMO:
 - a) Para el modelo sin restricciones MV_F02, SS determina al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
 - b) Para los modelos con restricciones MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12 y MV_F02_CC26, SS coincide en establecer al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
 - c) Para el modelo sin restricciones MV_F03, SS coincide en determinar al **KP_PAES** como el AEMO con mejor desempeño.

- d) Para los modelos con restricciones MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12 y MV_F03_CC26, SS establece como el AEMO con el mejor desempeño al **KP_NSGA2** (en tres de estos modelos, y al KP_mAG solamente en dos casos).

4.4.14 Comentarios acerca de la Métrica de contribución al frente (*PaCo: Pareto contribution*)

Se establece el orden de desempeño de los AEMO según la métrica PaCo. Para ello se consideran la contribución en puntos al frente de Pareto conjunto (FPC) y el porcentaje de contribución, donde el mayor valor de PaCo, es el mejor valor u óptimo. Consultar el Apéndice C para mayores detalles.

**MV_F02, MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12, MV_F02_CC26,
MV_F03, MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12, MV_F03_CC26**

- Para todos los modelos y todos los espacios de trabajo el mejor valor de PaCo lo tiene el KP_NSGA2.

Para todos los modelos y casi todos los espacios de trabajo, el KP_mAG tiene mejor valor de PaCo que el KP_PAES, y solamente en tres casos es al contrario.

- Existen únicamente dos casos donde otro AEMO se acerca a los niveles de PaCo del NSGA2. En el modelo sin restricciones MV_F03, para el espacio de trabajo BMV2001 el KP_PAES tiene un 34.82 % de contribución y el KP_NSGA2 tiene el 48.47 % de contribución; para el espacio de trabajo BMV2002 el KP_NSGA2 tiene un 45.38 % de contribución y el KP_mAG tiene el 36.87 % de contribución.
- El KP_PAES tiene porcentajes de contribución de 0 % en casi todos sus espacios de trabajo en 5 de los 10 modelos.
El KP_mAG tiene porcentajes de contribución de 0 % en casi todos sus espacios de trabajo en 2 de los 10 modelos.

El KP_NSGA2 fue casi el único AEMO que contribuyó al FPC en los modelos MV_F02_CC26 y MV_F03_CC26, excepto por un espacio de trabajo donde el KP_MAG también contribuyó al FPC.

- Para todos los modelos y todos los espacios de trabajo, los porcentajes de contribución límite fueron:

	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG
min	0	45.38	0
max	34.82	98.51	36.87

Por lo tanto, el orden de mejor a peor desempeño medido con PaCo se tiene de la forma indicada en la tabla 4.69.

	PaCo
1	KP_NSGA2
2	KP_mAG
3	KP_PAES

Tabla 4.69. Medición del desempeño con PaCo. Todos los modelos.

4.4.15 Análisis de los resultados acerca de la Métrica de contribución al frente (*PaCo: Pareto contribution*)

1. Con respecto a la funcionalidad de la métrica:
 - a) La PaCo se fundamenta en la medición de la contribución de los puntos de grupos de frentes de Pareto generados (FPG), sobre un frente de Pareto conjunto (FPC). Para el problema del MV se crearon aproximaciones al FPV (AFPV). Estas aproximaciones no representan a todos los puntos disponibles para cada frente, por lo que la medición del desempeño a través de la PaCo sólo debe contemplarse desde el punto de vista del frente parcial comparado. El FPC está formado por los puntos no-dominados resultantes de unir grupos de FPG al AFPV (p. ej. un grupo de 20 simulaciones para cada AEMO). Como resultado, se obtienen valores de PaCo que miden la contribución de un subconjunto de FPG (un AEMO) sobre el FPC, por

lo que se compara la calidad (no-dominancia) y cantidad de los puntos generados por cada AEMO con respecto a los otros AEMO y al AFPV. Sin embargo esto solamente indica la medición de una parte del FPV, lo cual quiere decir que una mala aproximación del AFPV puede propiciar valores óptimos de PaCo, sin indicar con ello que se considere a todo el FPV, por lo que pueden existir otros o mejores puntos del FPV que no están incluidos en el FPC. Por ejemplo el KP_PAES para algunos modelos genera archivos con pocos puntos del FPG (un FPG demasiado pequeño con respecto al AFPV), lo cual promueve que se obtengan valores bajos de PaCo (poca contribución) sobre el FPC.

- b) Las pruebas realizadas muestran que el KP_PAES al simular el modelo KP_F02_CC26 genera soluciones con archivos vacíos, y para otros modelos genera varias soluciones con algunos archivos vacíos; esta situación promueve valores de 0 (poca contribución) de PaCo.
2. Con respecto a las mediciones del desempeño de los AEMO:
- a) Para el modelo sin restricciones MV_F02, PaCo determina al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
 - b) Para los modelos con restricciones MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12 y MV_F02_CC26, PaCo coincide en establecer al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
 - c) Para el modelo sin restricciones MV_F03, PaCo coincide en determinar al **KP_NSGA2** como el AEMO con mejor desempeño.
 - d) Para los modelos con restricciones MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12 y MV_F03_CC26, PaCo coincide en establecer como el AEMO con el mejor desempeño al **KP_NSGA2**.

4.4.16 Resumen del Análisis de los resultados obtenidos

Se analizan los resultados de las métricas de desempeño, se muestran ejemplos de la aplicación de las métricas a los AEMO, y se resumen las principales características de los AEMO en lo individual.

Métricas SC, ISC, IGD, TSC, ITSC, SS, PaCo

Los resultados obtenidos al aplicar las métricas de medición del desempeño para los tres AEMO simulados, establecen el mayor nivel de coincidencia a un AEMO como se muestra en la tabla 4.70.

	MV_F02	MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12, MV_F02_CC26	MV_F03	MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12, MV_F03_CC26
SC	KP_NSGA2	KP_NSGA2	NA	NA
ISC	KP_NSGA2	NA	KP_mAG	KP_mAG
IGD	KP_NSGA2	KP_NSGA2	KP_mAG, KP_NSGA2	KP_mAG
TSC	KP_NSGA2	KP_NSGA2	NA	NA
ITSC	KP_NSGA2	KP_NSGA2	KP_NSGA2	KP_NSGA2
SS	KP_NSGA2	KP_NSGA2	KP_PAES	KP_NSGA2
PaCo	KP_NSGA2	KP_NSGA2	KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla 4.70. AEMO de mejor desempeño según las métricas de desempeño.

Las métricas invertidas (ISC, ITSC) miden el desempeño para los casos donde las métricas no invertidas no pueden generar resultados.

Los archivos vacíos y los archivos que contienen pocos puntos del FPG, no permiten calcular algunas métricas o producen resultados óptimos con respecto al pequeño espacio del FPV que consideran (excepto para PaCo).

La métrica propuesta ISC permite calcular valores para los modelos sin restricciones (MV_F02, MV_F03) y para los modelos con 3 funciones objetivo y con restricciones (MV_F03_CC4, MV_F03_CC8, MV_F03_CC12, MV_F03_CC26), en tanto que el SC sólo permite calcular valores para los modelos con 2 funciones objetivo con y sin restricciones (MV_F02, MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12, MV_F02_CC26).

La métrica ITSC permite calcular valores para todos los modelos, en tanto que el TSC sólo permite calcular valores para los modelos con 2 funciones objetivo con y sin restricciones (MV_F02, MV_F02_CC4, MV_F02_CC8, MV_F02_CC12, MV_F02_CC26).

La métrica propuesta PaCo, permite medir el desempeño de todos los modelos sin importar que existan archivos vacíos o archivos con pocos puntos del FPG.

Ejemplo de métricas con modelo MV_F02_CC8

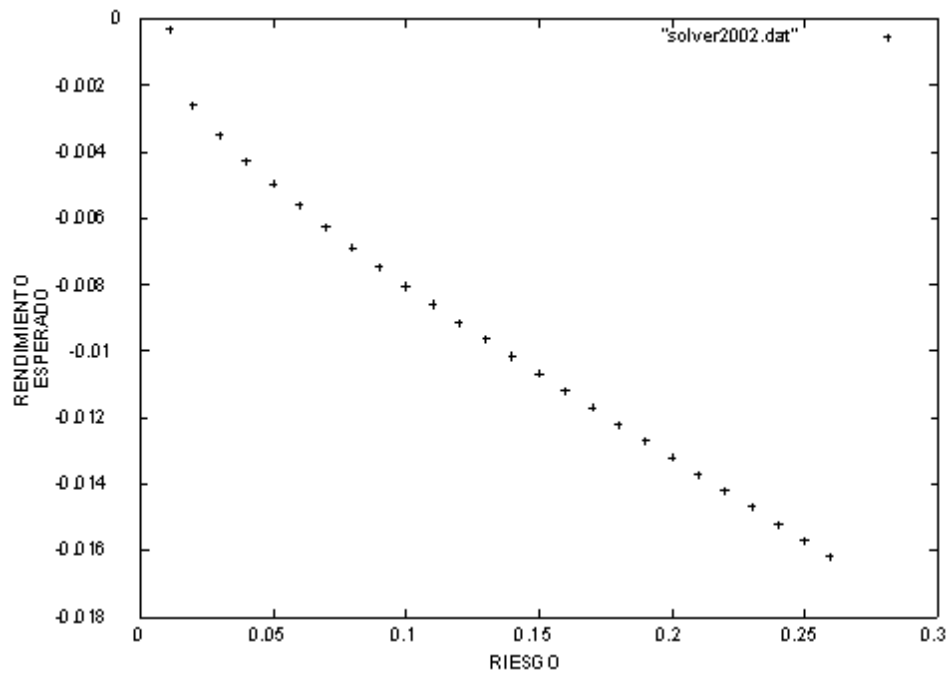


Fig. 4.17. AFPV para el espacio de trabajo BMV2002.

Por ejemplo, los valores de las métricas para los resultados de las simulaciones con el modelo MV_F02_CC8 para el espacio de trabajo BMV2002 (figuras 4.18, 4.19, 4.20 y 4.21), se muestran en la tabla 4.71. En la figura 4.17 se muestra la AFPV correspondiente.

	SC	ISC	IGD	TSC	ITSC	SS	PaCo
KP_NSGA2	3	0	9.86972E-05	0.0769231	0	0.000438587	92.58 %
KP_PAES	5	0	0.282291	0.0384615	0	0.00016757	0.28 %
KP_mAG(s14)	0	24	0.000381919	0	0.665	0.000787693	6.06 %
KP_mAG(s8)	50	2	0.0250617	0.0384615	0.04	0.000236086	6.06 %

Tabla 4.71. Valores métricas. MV_F02_CC8. BMV2002.

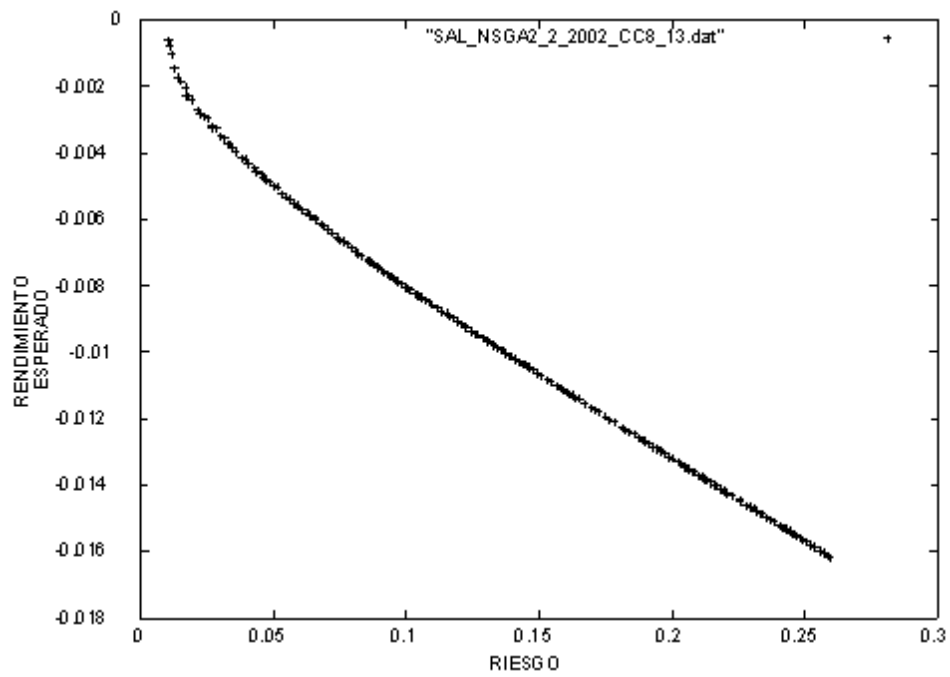


Fig. 4.18. FPG creado por KP_NSGA2 con BMV2002. MV_F02_CC8.

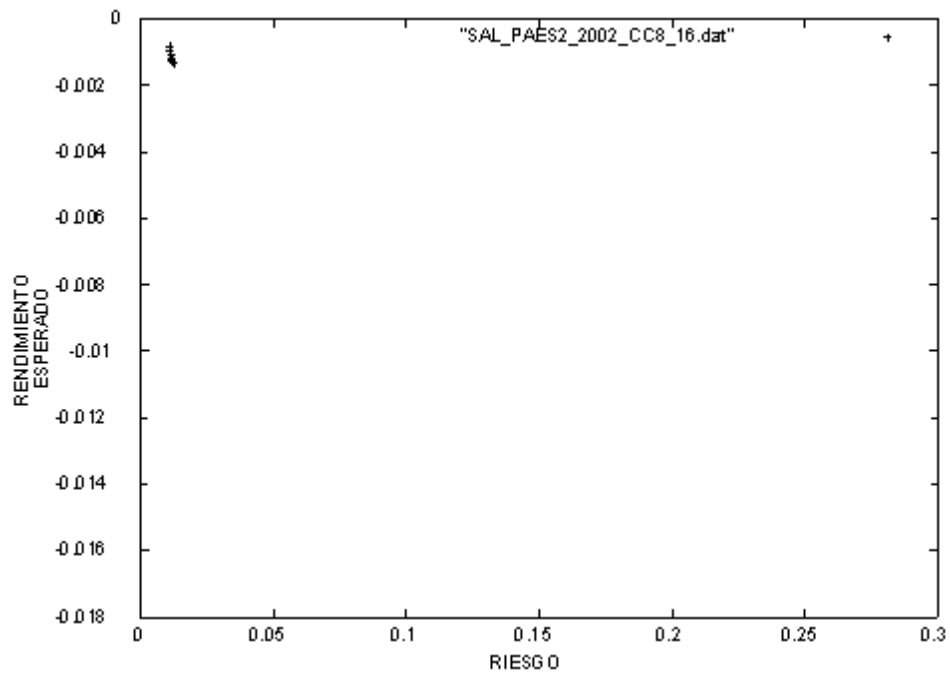


Fig. 4.19. FPG creado por KP_PAES con BMV2002. MV_F02_CC8.

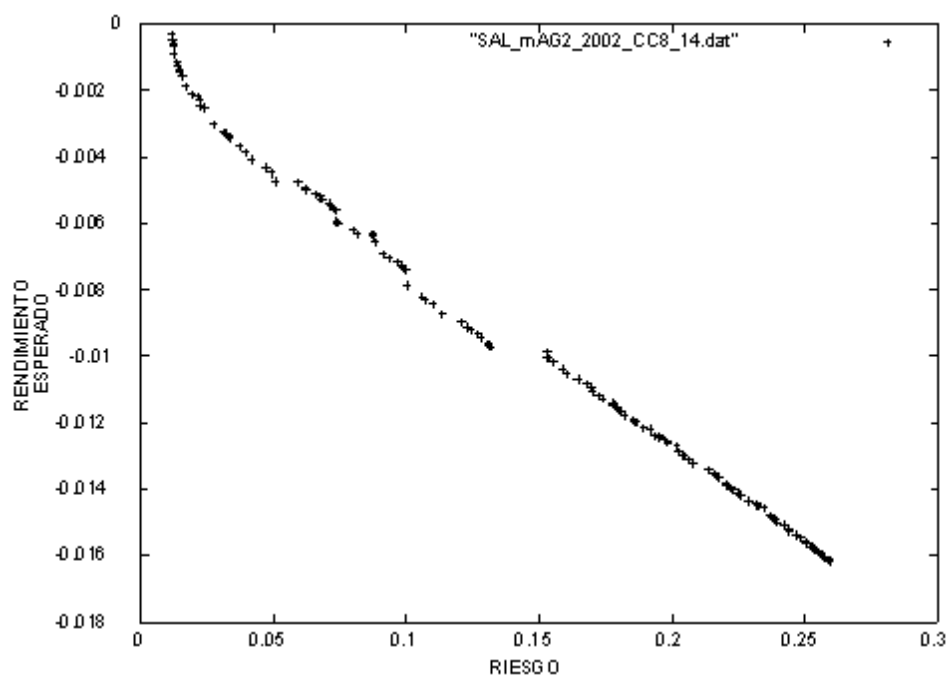


Fig. 4.20. FPG creado por KP_mAG con BMV2002. MV_F02_CC8 simulación 14.

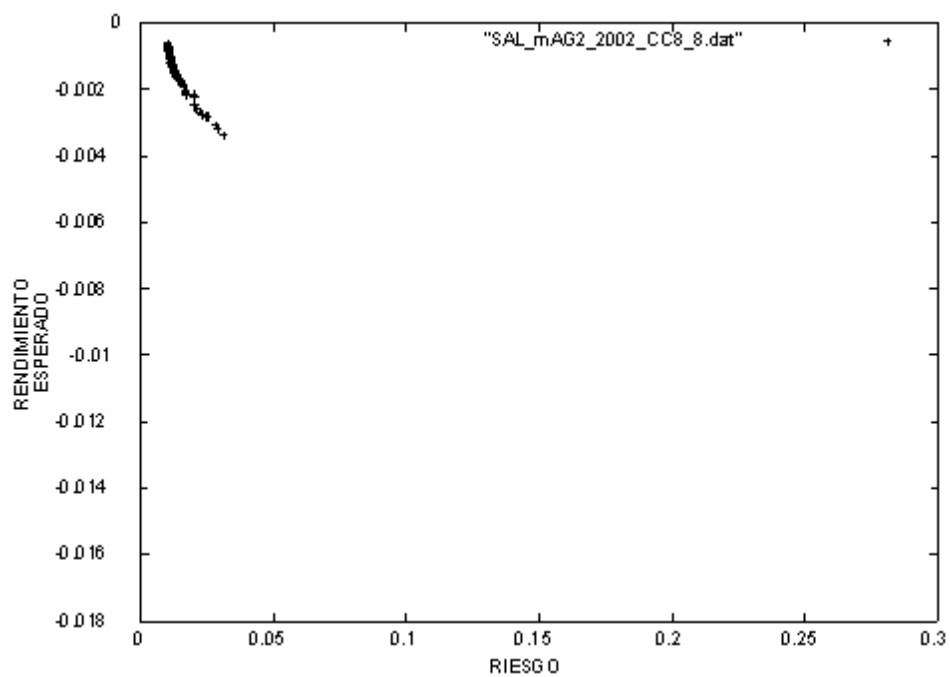


Fig. 4.21. FPG creado por KP_mAG con BMV2002. MV_F02_CC8 simulación 8.

Se puede observar que SC muestra el valor más alto (óptimo) para el KP_mAG (simulación 8); esta simulación es un FPG con muchos puntos que dominan a una parte del AFPV. De manera similar ISC e ITSC asignan el valor más bajo (óptimo) a KP_PAES debido a que ningún punto del AFPV pertenece al FPG y ningún punto del FPG es dominado por AFPV. Sin embargo, esta situación de valores óptimos no indica que lo sea para todo el AFPV, lo es sólo en forma local para una parte del AFPV.

El IGD asigna el segundo mejor valor al KP_mAG (simulación 14) porque se extiende en gran parte del AFPV, pero con valores dominados por KP_NSGA2.

El TSC mide la cobertura de FPG sobre AFPV con respecto al propio AFPV, por lo que considera a toda la extensión del AFPV.

El SS mide la distribución de los puntos con respecto a FPG sin considerar el AFPV, por lo que KP_PAES tiene un buen valor (óptimo) pero con respecto al FPG, independientemente de si éste representa una parte o todo el AFPV.

El PaCo mide a todos los puntos no-dominados resultado de comparar a los AEMO y el AFPV en conjunto, estableciendo la proporción de contribución al FPC de cada AEMO. Esto mide en conjunto que KP_NSGA2 produjo los mejores puntos (no-dominados) y la mayor cantidad de ellos, con respecto a un número establecido de simulaciones.

Ejemplo de métricas con modelo MV_F03

Por ejemplo, los valores de las métricas para los resultados de las simulaciones con el modelo MV_F03 para el espacio de trabajo BMV2001 (figuras 4.23, 4.24 y 4.25), se muestran en la tabla 4.72. En la figura 4.22 se muestra la AFPV correspondiente.

	SC	ISC	IGD	TSC	ITSC	SS	PaCo
KP_NSGA2	0	7	0.00689036	0	0.26	0.108555	48.47 %
KP_PAES	0	9	0.00786572	0	0.66	0.0122386	34.82 %
KP_mAG	0	11	0.00697861	0	0.685	0.00649874	13.65 %

Tabla 4.72. Valores métricas. MV_F03. BMV2001.

Se puede observar que SC y TSC no pueden determinar un valor óptimo. ISC e ITSC asignan el valor más bajo (óptimo) a KP_NSGA2 debido a que ningún punto del AFPV pertenece al FPG y ningún punto del FPG es dominado por AFPV. Sin embargo, es-

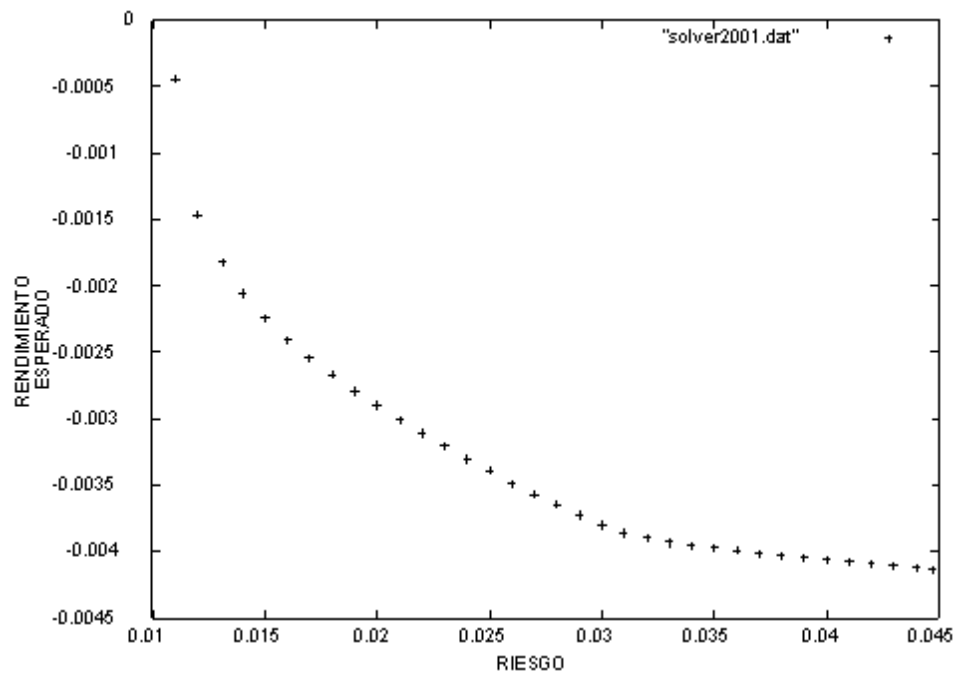


Fig. 4.22. AFPV para el espacio de trabajo BMV2001.

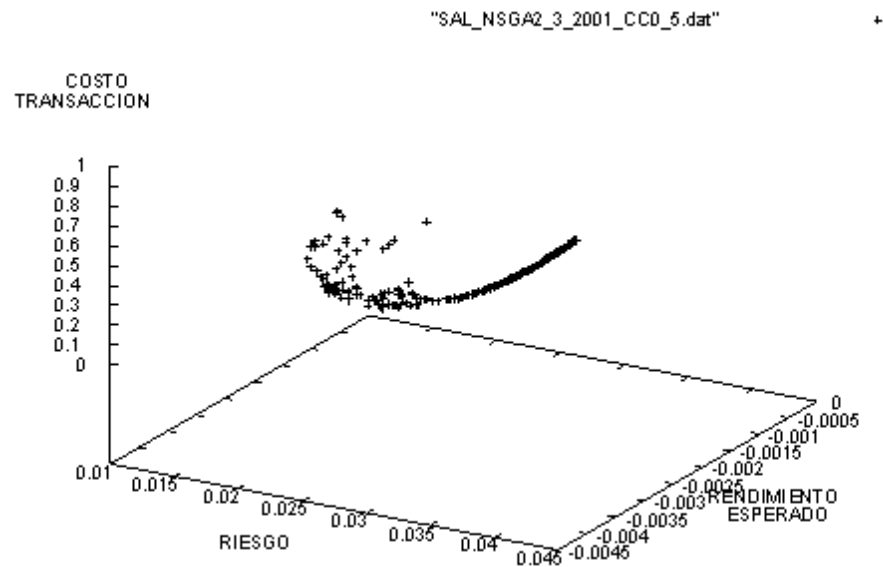


Fig. 4.23. FPG creado por KP_NSGA2 con BMV2001 para el modelo MV_F03.

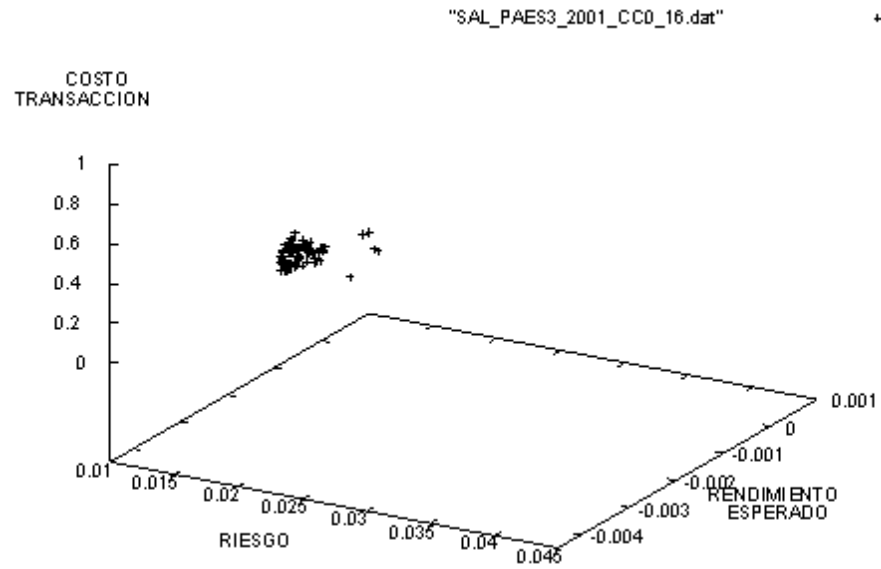


Fig. 4.24. FPG creado por KP_PAES con BMV2001 para el modelo MV_F03.

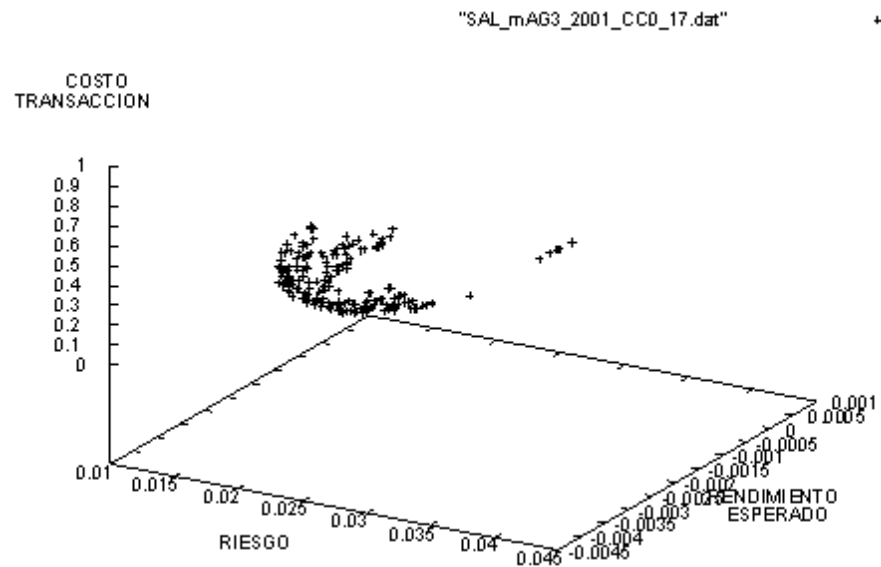


Fig. 4.25. FPG creado por KP_mAG con BMV2001 para el modelo MV_F03.

ta situación de valores óptimos no indica que lo sea para todo el AFPV, lo es sólo en forma local para una parte del AFPV.

El IGD asigna el segundo mejor valor al KP_mAG porque se extiende en gran parte del AFPV, pero con valores dominados por KP_NSGA2.

El SS mide la distribución de los puntos con respecto a FPG sin considerar el AFPV, por lo que KP_mAG tiene un buen valor (óptimo) pero con respecto al FPG, independientemente de si éste representa una parte o todo el AFPV.

El PaCo mide a todos los puntos no-dominados resultado de comparar a los AEMO y el AFPV en conjunto, estableciendo la proporción de contribución al FPC de cada AEMO. Esto mide en conjunto que KP_NSGA2 produjo los mejores puntos (no-dominados) y la mayor cantidad de ellos, con respecto a un número establecido de simulaciones. En este caso en forma muy cercana también contribuye KP_PAES.

Principales características del micro-AG para optimización multiobjetivo con respecto a las simulaciones

Es el AEMO más rápido para los modelos que no consideran restricciones.

Tiene la proporción mayor (14 a 1, o más) de tiempo en los modelos con restricciones, con respecto al KP_NSGA2.

Aumenta el tiempo de proceso en relación directa al valor de la restricción.

Mediante pruebas empíricas se determinó que en general este AEMO puede generar mejores resultados aumentando el número de generaciones (desde 200,000 hasta 1,000,000 de evaluaciones), sin embargo, obviamente el tiempo de proceso se incrementa considerablemente.

Principales características del PAES con respecto a las simulaciones

Las pruebas realizadas muestran que al simular el modelo KP_F02_CC26 genera soluciones con archivos vacíos, y para los otros modelos genera varias soluciones con algunos archivos vacíos. También, en algunos archivos, éstos son generados con un contenido de pocos puntos.

Mediante pruebas empíricas se determinó que en general este AEMO ofrece muy poca mejora de los resultados al aumentar el número de generaciones, además de que el tiempo de proceso se incrementa considerablemente.

Principales características del NSGA-II con respecto a las simulaciones

Es el AEMO más rápido para los modelos que sí consideran restricciones.

Para el caso de los modelos con restricciones, es el AEMO con la menor desviación estándar, y por ello sus tiempos de ejecución parecen más estables.

Es el AEMO más referenciado por las métricas, como el de mejor desempeño.

4.4.17 Consideración financiera de la solución propuesta

En la sección 4.1 se describe que la decisión para preferir un portafolio de inversión desde el punto de vista del MV, se basa en los *requerimientos* ahí descritos. Teniendo en cuenta dichos requerimientos y de las simulaciones realizadas, se concluye que:

1. A partir de un conjunto de instrumentos financieros es posible mostrar un panorama de las combinaciones de riesgo y rendimiento posibles utilizando el AEMO KP_NSGA2.
2. Es posible obtener varios niveles de riesgo, junto con su máximo rendimiento utilizando el AEMO KP_NSGA2.
3. A partir de varios niveles de riesgo y rendimiento, es factible obtener diferentes estructuras de distribución de la cartera que generan *el mismo riesgo y rendimiento* (independientemente de los pesos asignados a cada instrumento financiero).

Se demuestra que el AEMO KP_NSGA2 pueden lidiar con estos requerimientos y puede implementar otras funciones objetivo, además del riesgo y rendimiento, y otras restricciones además de las propias del MV.

Desde la perspectiva financiera, el AEMO KP_NSGA2 ofrece generalidad en el modelado, y como muestran los tiempos de proceso, ofrece una respuesta expedita, permitiendo elegir aquella solución más adecuada al entorno financiero existente.

Ejemplo de interpretación del modelo MV_F02 como portafolio de inversión con diferentes estructuras de cartera

Para mostrar como los AEMO pueden generar diferentes estructuras de cartera, en la tabla 4.73, se presentan parejas de portafolios integrados cada uno de ellos por una combinación diferente de instrumentos financieros (independientemente de las variaciones

cartera		pesos	
I	II	I	II
1	1	0.000293	0.000293
	2	0	0.000018
3	3	0.000006	0.000001
		0	0
		0	0
6	6	0.000018	0.000027
7	7	0.000001	0.000001
		0	0
9	9	0.210387	0.210689
		0	0
		0	0
12	12	0.000586	0.000588
13	13	0.488637	0.487993
		0	0
15	15	0.300029	0.300354
		0	0
17		0.000001	0
18	18	0.000009	0.00001
		0	0
20	20	0.000014	0.000014
		0	0
22		0.000009	0
23	23	0.000001	0.000001
		0	0
		0	0
	26	0	0.000001
27	27	0.000009	0.000009
σ		0.0343	0.0343
μ		0.0023	0.0023

cartera		pesos	
I	II	I	II
		0	0
		0	0
		0	0
	4	0	0.000012
		0	0
		0	0
7		0.003671	0
		0	0
9	9	0.245251	0.245156
		0	0
		0	0
	12	0	0.000001
13	13	0.750883	0.754801
14	14	0.000014	0.000012
		0	0
		0	0
17		0.000122	0
	18	0	0.000012
		0	0
20		0.000057	0
		0	0
	22	0	0.000003
	23	0	0.000001
		0	0
		0	0
		0	0
		0	0
27	27	0.000002	0.000001
σ		0.0384	0.0384
μ		0.0024	0.0024

cartera		pesos	
I	II	I	II
1		0.000545	0
2	2	0.000023	0.000168
3		0.000184	0
	4	0	0.000005
	5	0	0.000003
	6	0	0.000042
		0	0
		0	0
9	9	0.627376	0.627854
10	10	0.000001	0.000001
11		0.000006	0
		0	0
13	13	0.37186	0.371923
		0	0
15		0.000003	0
		0	0
17		0.000002	0
18	18	0.000001	0.000001
	19	0	0.000003
		0	0
		0	0
		0	0
		0	0
		0	0
		0	0
		0	0
σ		0.0760	0.0760
μ		0.0034	0.0034

Tabla 4.73. Diferentes estructuras de carteras de inversión obtenidas utilizando KP_NSGA2 con BMV99-04 para el modelo MV_F02.

en sus pesos), que generan el mismo nivel de riesgo y rendimiento. La información fue obtenida utilizando el KP_NSGA2 en el espacio de trabajo BMV99-04 para el modelo MV_F02.

Ejemplo de interpretación del modelo MV_F03 como frontera eficiente del MV

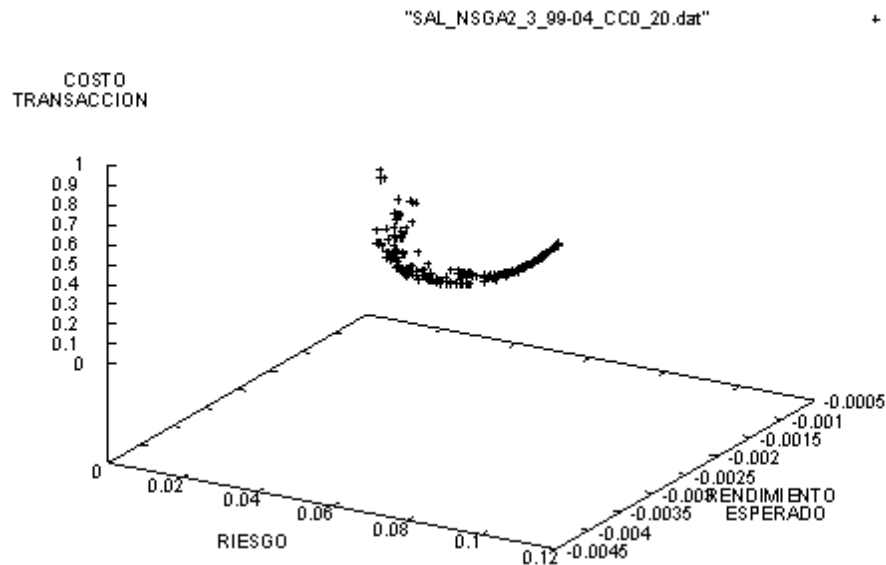


Fig. 4.26. FPG creado por KP_NSGA2 con BMV99-04 para el modelo MV_F03.

Utilizando un análisis similar al realizado por Vedarajan et al. [65], la figura 4.26 muestra el *frente de Pareto* (rendimiento μ , riesgo σ , costo de transacción ct) formado a partir del espacio de trabajo BMV99-04 para el problema MV_F03. Esta figura considera la minimización de 3 funciones objetivo, sin embargo, en el MV realmente se maximiza μ ; por lo que se transforma la optimización del MV como minimizar $-\mu$, σ y ct . La interpretación financiera del problema considera al *frente de Pareto* como la *frontera eficiente*, y esta última se grafica considerando la minimización de σ y ct , y la maximización de μ ,

La figura 4.27 es la *frontera eficiente* equivalente al frente de Pareto de la figura 4.26. Cada punto de la frontera eficiente se explica de la forma siguiente: para un valor dado de σ y ct , éste es el máximo valor de μ que se puede obtener del portafolio. Una forma más

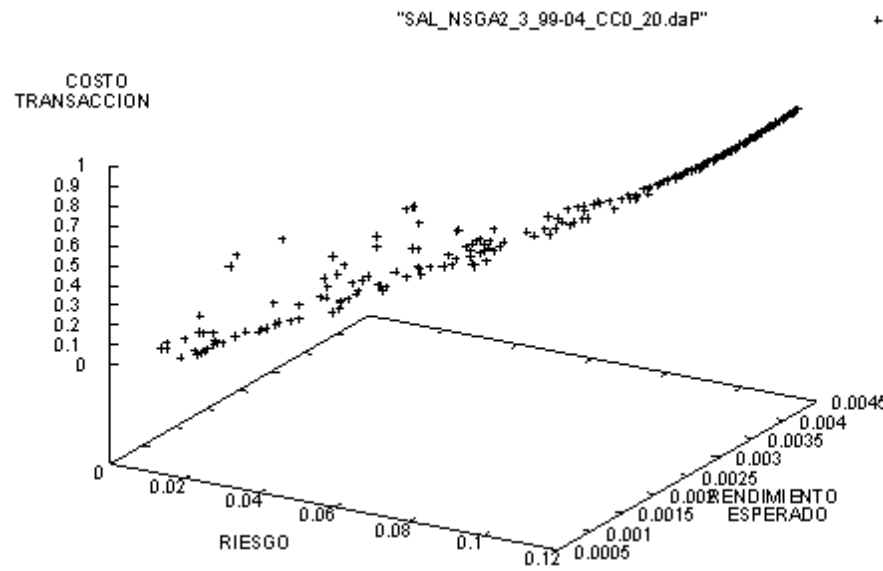


Fig. 4.27. FPG creado por KP_NSGA2 con BMV99-04 para el modelo MV_F03.

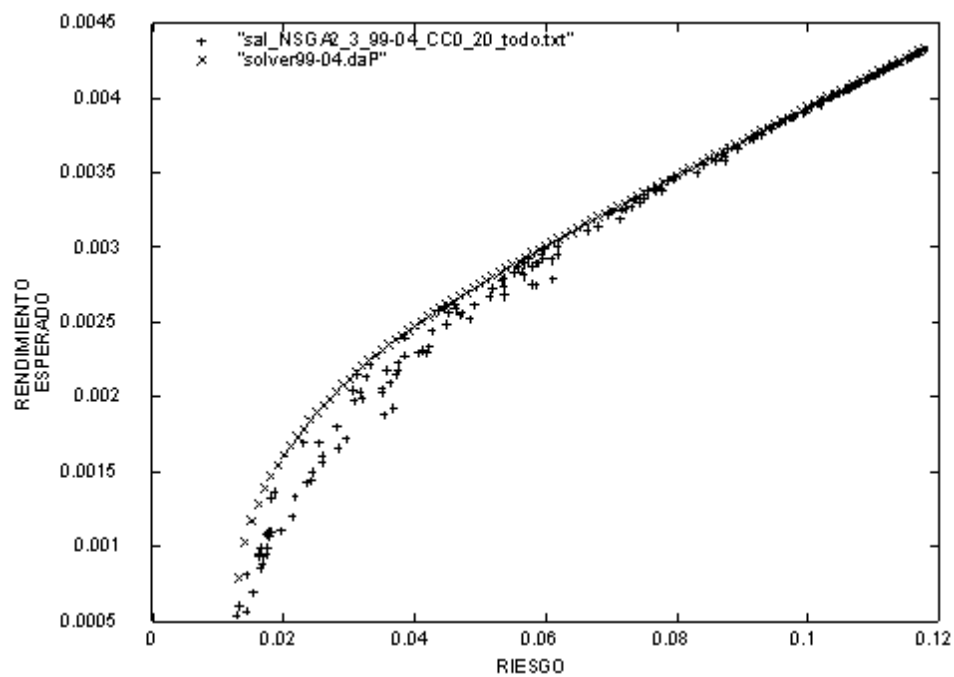


Fig. 4.28. Comparación de la AFPV con la Frontera Eficiente del μ y σ .

simple de entender los resultados se explica con la figura 4.28, que es la proyección de la figura tridimensional en el plano (rendimiento μ , riesgo σ). Los diferentes marcadores corresponden a diferentes bandas que representan varios rangos de costos de transacción y la frontera eficiente correspondiente al problema MV_FO3 que ignora los costos de transacción (F_{02}). Para valores bajos de ct de la figura 4.29, se tiene una banda óptima que se encuentra lejano y hacia la parte izquierda de F_{02} . Conforme ct se incrementa en las figuras 4.30 y 4.31, la banda se mueve hacia la derecha y se acerca a F_{02} , y para valores altos de ct la banda coincide con F_{02} como se muestra en las figuras 4.32 y 4.33. Esto tiene sentido, si no se está dispuesto en incurrir en grandes costos de transacción; el portafolio óptimo está lejano a F_{02} . Con altos costos de transacción nos acercamos a F_{02} ; pero nuestra mejor alternativa sólo será aquél portafolio cercano a F_{02} que considera el nivel de ct que estamos dispuestos a pagar.

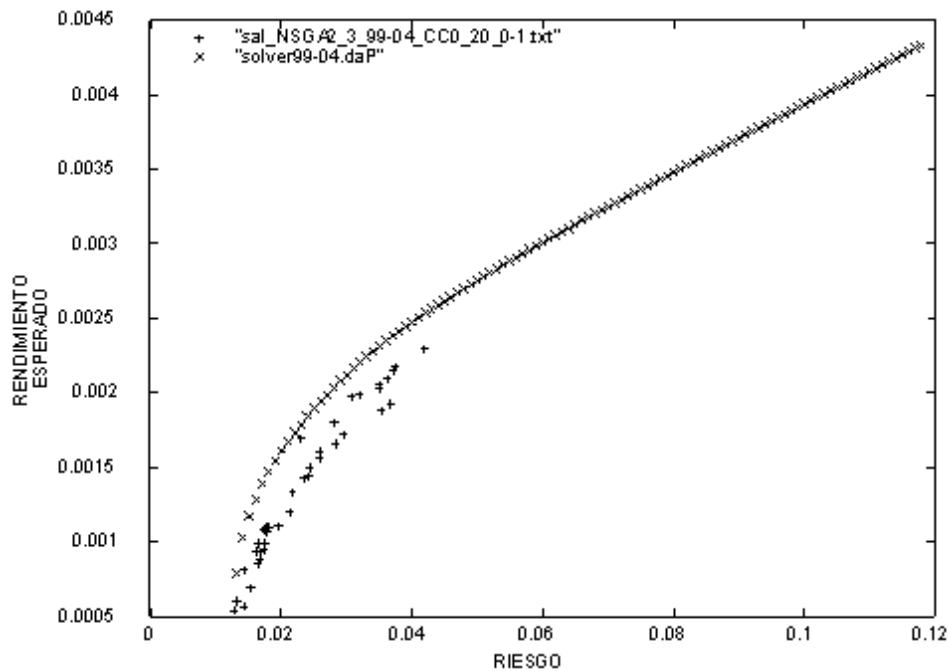


Fig. 4.29. AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango $[0.0:0.2)$.

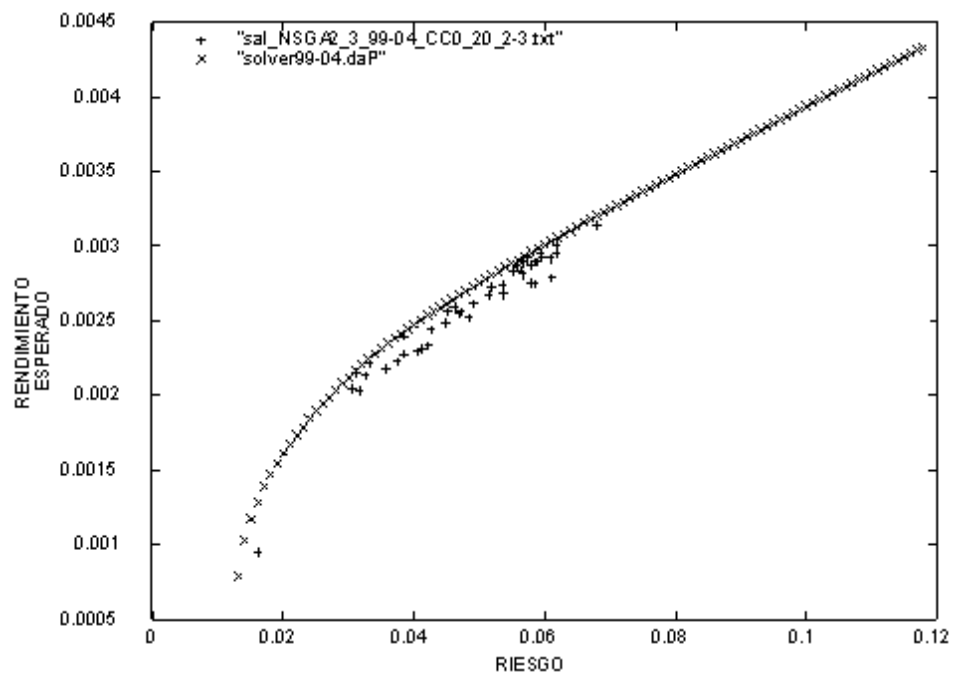


Fig. 4.30. AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango $[0.2:0.4)$.

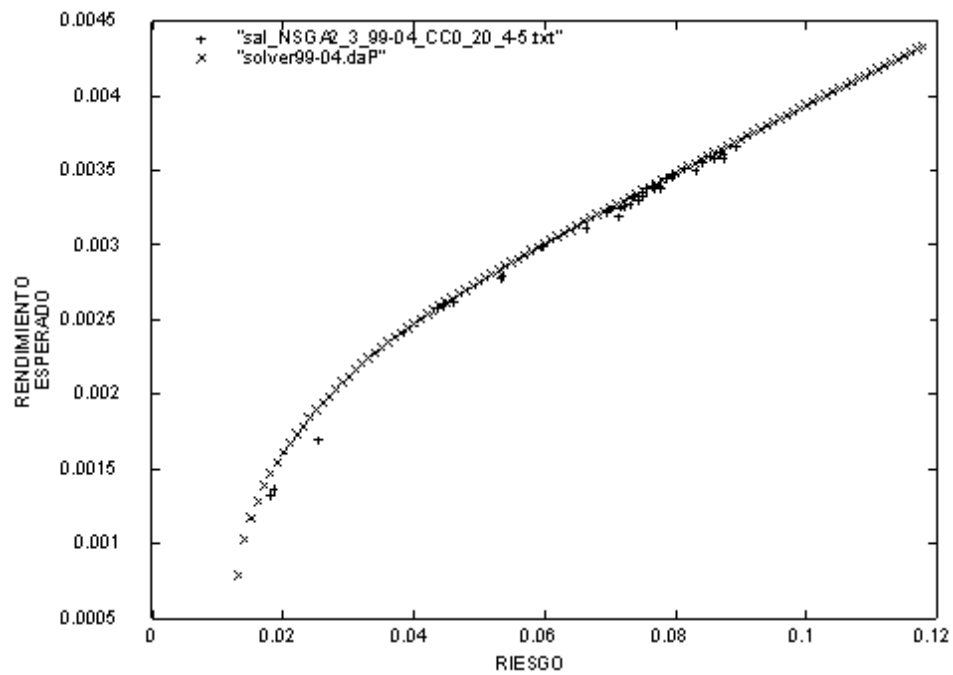


Fig. 4.31. AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango $[0.4:0.6)$.

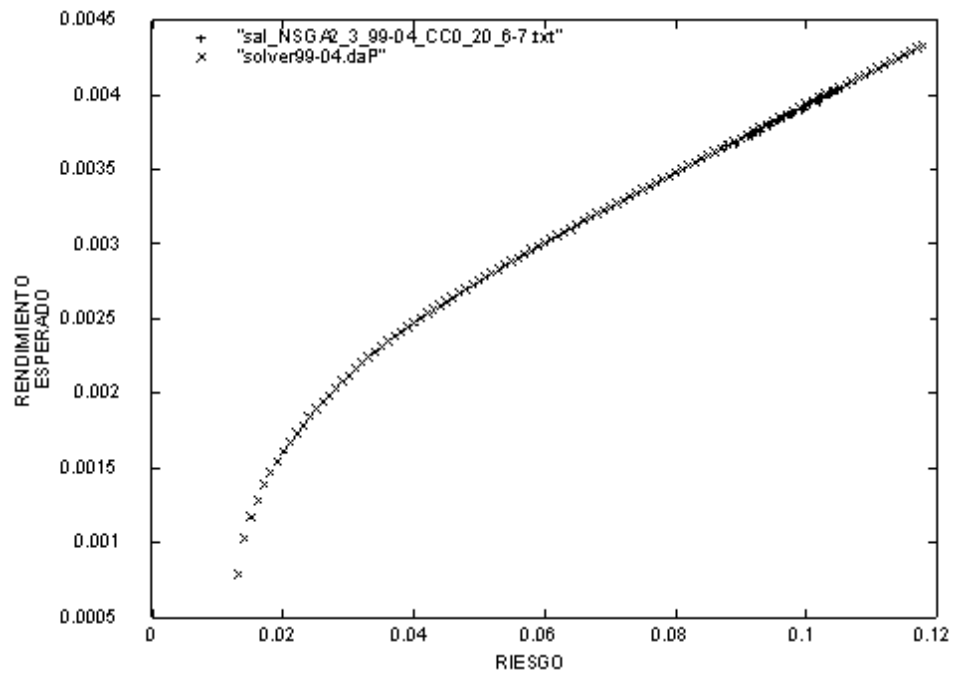


Fig. 4.32. AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango $[0.6:0.8]$.

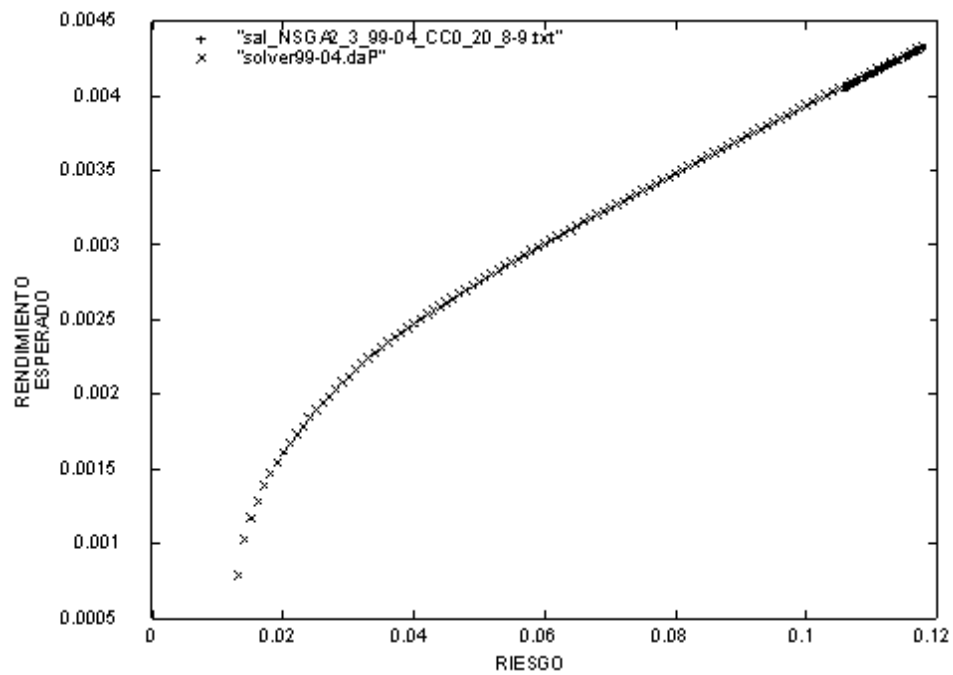


Fig. 4.33. AFPV y banda de la Frontera Eficiente del μ y σ con ct en el rango $[0.8:1.0]$.

Ejemplo de factibilidad de la solución del MV utilizando el AEMO KP_NSGA2

Utilizando el espacio de trabajo BMV99-04 y el KP_NSGA2 se calculan para todos los modelos, el portafolio con riesgo 0.050299 y se realiza la compra por un monto de \$1,000,000.00 de los instrumentos financieros correspondientes a la estructura de cartera seleccionada, Se realiza la compra de valores con fecha *feb-25-2004*, bajo el supuesto de haber realizado ese mismo día el proceso de simulación del MV⁴⁹. Se calcula la cantidad de dinero correspondiente para cada peso o porcentaje asignado a cada instrumento financiero, y se determina la cantidad de acciones equivalente al monto de dinero asignado a cada instrumento financiero. Con este número de acciones para cada instrumento financiero, se recalcula día a día hasta la fecha *mar-31-2004* el precio del portafolio utilizando el precio de las acciones correspondiente a cada fecha⁵⁰. Se muestra en la tabla 4.74 el portafolio de mayor precio en la fecha *mar-31-2004*. Para este portafolio el rendimiento esperado es de 0.002701 y el rendimiento real promedio obtenido durante el periodo del ejemplo es de 0.004491086; esta misma situación se presenta para todos los modelos, el rendimiento promedio real es mayor al rendimiento esperado.

Los cambios de precio del portafolio se muestran en la figura 4.34 y la variación del rendimiento en la figura 4.35. Las gráficas equivalentes para todos los modelos muestran que las soluciones obtenidas mediante el KP_NSGA2 generaron ganancias para el periodo de tiempo mencionado,

⁴⁹ El espacio de trabajo BMV99-04 considera la información del período 5-ene-1999 al 24-feb-2004. Para este ejemplo se utiliza información adicional del periodo 25-feb-2004 al 31-mar-2004.

⁵⁰ El instrumento financiero 26 (correspondiente a la emisora WALMEX V) dejó de cotizar a partir de mar-3-2004, por lo que se toma el último precio (mar-2-2004) para las fechas restantes.

SAL_NSGA2_3_99-04_CC26_1						
instrumento financiero	% asignado	número de acciones	precio del portafolio con fecha:...			
			02/25/2004	02/26/2004	...	03/31/2004
1	0.000002	0.05	2	2.0565	...	2.1195
2	0.001293	11.54464286	1293	1297.502411	...	1320.47625
3	0.000001	0.029761905	1	1.002083333	...	1.041666667
4	0.000005	0.217485863	5	5.228360157	...	5.067420618
5	0.000032	0.505209978	32	32.0757815	...	33.46005684
6	0.000024	1.012658228	24	24.05063291	...	25.22531646
7	0.000004	0.291970803	4	4.04379562	...	4.172262774
8	0.000219	47.60869565	219	219	...	182.8173913
9	0.386784	6289.170732	386784	391500.878	...	464769.7171
10	0.000824	16.54950793	824	826.6479213	...	909.7264511
11	0.000019	0.398824517	19	18.90827036	...	18.70088161
12	0.002069	27.33157199	2069	2077.199472	...	2022.536328
13	0.206815	17452.74262	206815	206989.5274	...	209432.9114
14	0.001099	82.32209738	1099	1118.757303	...	1222.483146
15	0.398979	9887.95539	398979	400066.6751	...	434971.1576
16	0.000091	2.20713073	91	93.56027165		89.05772496
17	0.000018	0.604432505	18	17.9516454		18.39288113
18	0	0	0	0		0
19	0.000024	0.813559322	24	23.85355932		24.62644068
20	0.000017	10.8974359	17	17.21794872		16.67307692
21	0.000129	4.069400631	129	132.6217666		139.9466877
22	0.000275	17.10199005	275	276.8812189		284.7481343
23	0.000275	14.48893572	275	274.4204426		282.2444679
24	0.000008	0.336275746	8	8.151324086		8.86086591
25	0.000146	24.62057336	146	148.4620573		162.0033727
26	0.000582	16.96793003	582	583.696793		575.3825073
27	0.000266	7.73255814	266	267.3145349		263.6802326
precio portafolio			1,000,000	1,006,027.685		1,116,787.229

Tabla 4.74. Compra de instrumentos financieros y variación en precio del portafolio.

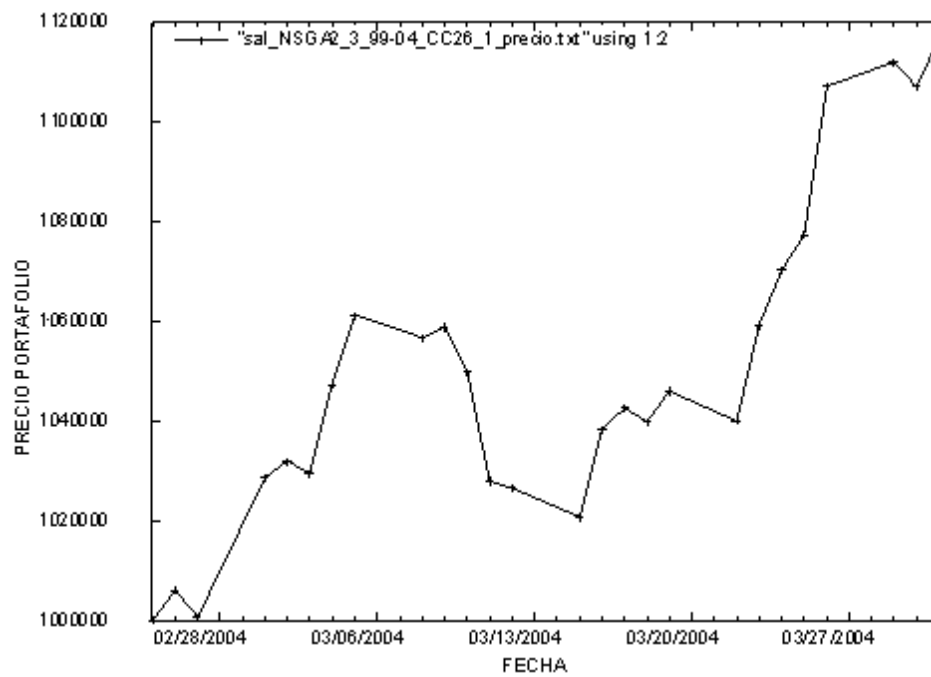


Fig. 4.34. Variación de precios del portafolio. MV_F03_CC26.

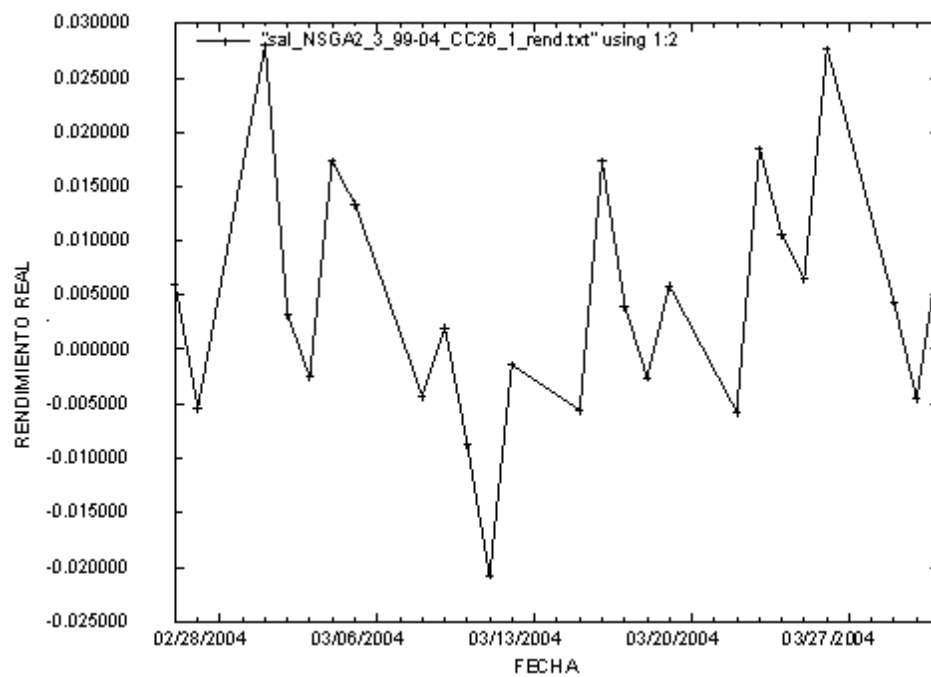


Fig. 4.35. Variación del rendimiento real del portafolio MV_F03_CC26.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

1. La principal ventaja de los AEMO modificados parece ser su habilidad para alterar fácilmente la estructura del portafolio. Con el *procedimiento de mutación alternativo* los instrumentos financieros eliminados causan que las variables de decisión involucradas sean puestas a cero. Por lo tanto, el vector resultante de las variables de decisión w_i estará disperso; y promoverá la diversidad de la población al aplicar los operadores de mutación y cruza, según corresponda. Con esto, los AEMO pueden moverse fácilmente a través del espacio de combinación de instrumentos financieros.

Los experimentos con la *representación adicional del Knapsack* apoyan este punto de vista en lo general y son capaces de resolver el problema de optimización de portafolios de forma más eficiente que los AEMO originales, debido a la capacidad mejorada de búsqueda con respecto a las posibles combinaciones de instrumentos financieros en el portafolio, independientemente de que existan restricciones de cardinalidad. Con el incremento en la complejidad del modelo, el AEMO modificado KP_NSGA2 siempre es capaz de generar soluciones.

De esta forma, la representación concuerda con el hecho de que los cromosomas (portafolios de instrumentos financieros) generan puntos sobre el frente de Pareto que raramente integran a todos los genes (instrumentos financieros) disponibles, limitando la estructura de tales cromosomas a la selección de un subconjunto de dichos genes, que es el sentido del *Knapsack binario*, promoviendo con ello, la fácil eliminación (puesta a cero) y selección (valores diferentes a cero) de instrumentos financieros del portafolio. Con el *Knapsack* los genes eliminados facilitan la búsqueda local ya que tales genes involucrados tienen un valor de cero (aún después de la normalización de los genes); lo que genera cromosomas dispersos integrados de buenos instrumentos. Por lo tanto el cromosoma resultante de las variables de decisión w_i estará disperso, y con ello el operador de cruza puede buscar combinaciones de genes efectivos, en lugar de combinar todos los genes disponibles, lo que incrementa notablemente la velocidad de convergencia; además, la mutación permite el cambio de los genes que serán eliminados y selecciona-

dos. Con esto, los AEMO pueden explorar fácilmente el espacio de combinación de instrumentos financieros.

2. El KP_NSGA2 probó tener el mejor desempeño en lo general, ya que aún con las mejoras propuestas a los AEMO KP_PAES y KP_mAG, éstos no mostraron un mejor desempeño que el KP_NSGA2.
3. El uso de la métrica de conteo exitoso invertido (*ISC: Inverted Success Counting*) mostró un comportamiento complementario al de la métrica de conteo exitoso (*SC: Success Counting*); generando resultados ISC para los casos donde SC no obtuvo un resultado, y viceversa. La métrica de contribución al frente (*PaCo: Pareto contribution*) permitió medir el desempeño aún en los casos donde existen archivos vacíos o archivos con un contenido de pocos puntos. En ambos casos la calidad de la aproximación al frente de Pareto verdadero (AFPV) definida en términos de la amplitud del frente, el número de puntos y su no-dominancia, está en relación directa con la calidad de la medición del desempeño. Para los casos donde es difícil establecer un FPV o una aproximación al mismo, la aplicación de PaCo versus un frente de Pareto conjunto se vislumbra adecuada.
4. El modelo de media-varianza de Markowitz adolece de dos principales problemas: primero, es bastante complicado y costoso recolectar la información histórica necesaria y estimar los rendimientos y riesgos esperados, y segundo, el modelo de Markowitz es muy sensible a los errores en la estimación de rendimientos y riesgos esperados.
5. Desde el punto de vista financiero se evidenció que los analistas financieros e inversionistas, desconocen la disponibilidad de las herramientas de cómputo evolutivo para la solución de problemas de índole económico-financiero.
6. Como trabajo de investigación a partir de este documento, se propone:
 - a) Implementar el uso de restricciones, utilizando algoritmos de reparación y Lamarckismo, con la finalidad de determinar individuos factibles que hereden sus “buenas” características a las siguientes generaciones, mediante la actualización de las variables de decisión.

- b) Conocer las condiciones del mundo real económico-financiero bajo las cuales es factible aplicar los AEMO; por lo que *es valioso conocer el porqué un método heurístico específico funciona mejor que otros*, auxiliándose para ello del uso de métricas para la medición del desempeño. Además, *es importante establecer la garantía del buen desempeño* y en que forma depende este éxito de la disposición de los parámetros. En este sentido y especialmente con respecto a la administración financiera del riesgo, *sería importante investigar cómo influyen en el desempeño de los AEMO (para diferentes problemas) características tales como: el tamaño de las rejillas incrustadas, la consideración de otras variables, las técnicas para mantener la diversidad de la población, las restricciones para su aplicación a problemas reales, etc.*
- c) Determinar variantes al modelo de Markowitz y sus distintas interpretaciones operativas, por ejemplo mediante la utilización de índices y calificadoras de valores, como elementos complementarios o sustitutivos de los conceptos originales de riesgo y rendimiento. Para que a partir de estos elementos se desarrollen implementaciones de AEMO de tales modelos para su experimentación.
- d) Proponer métricas de medición del desempeño tomando en consideración los requerimientos de solución del usuario final de la aplicación, y lo que hace a la solución factible y aplicable en su entorno operativo real.
- e) Debido al enfoque práctico de este trabajo de tesis sería relevante divulgar este tipo de soluciones a los interesados directos en la solución del MV, a la vez que determinar otro tipo de problemas y características reales del ambiente económico-financiero, con la finalidad de implementar su solución mediante la aplicación de AEMO.

Bibliografía

- [1] Jorge Barragán. Principios generales de la biología. un punto de vista sobre la evolución. *Instituto de Investigación sobre la Evolución Humana A. C.*, 2003.
- [2] J. C. Bean. Genetic algorithm and random keys for sequencing and optimization. *ORSA Journal of Computing*, 6:154–160, 1994.
- [3] BMV. Mercado de capitales ix. indice de bursatilidad. *Boletín Bursátil sección noticias de interés del mercado de capitales e instrumentos de deuda*, XLV No. 12049, martes 3 de febrero de 2004.
- [4] Carlos A. Coello Coello and Gregorio Toscano Pulido. Multiobjective Optimization using a Micro-Genetic Algorithm. In Lee Spector, Erik D. Goodman, Annie Wu, W.B. Langdon, Hans-Michael Voigt, Mitsuo Gen, Sandip Sen, Marco Dorigo, Shahram Pezeshk, Max H. Garzon, and Edmund Burke, editors, *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2001)*, pages 274–282, San Francisco, California, 2001. Morgan Kaufmann Publishers.
- [5] Carlos A. Coello Coello. A Comprehensive Survey of Evolutionary-Based Multiobjective Optimization Techniques. *Knowledge and Information Systems. An International Journal*, 1(3):269–308, August 1999.
- [6] Carlos A. Coello Coello. A Short Tutorial on Evolutionary Multiobjective Optimization. In Eckart Zitzler, Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Carlos A. Coello Coello, and David Corne, editors, *First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pages 21–40. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science No. 1993, 2001.
- [7] Carlos A. Coello Coello and Gary B. Lamont, editors. *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*. World Scientific, Singapore, 2004. ISBN 981-256-106-4.
- [8] Carlos A. Coello Coello and Gregorio Toscano Pulido. A Micro-Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. In Eckart Zitzler, Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Carlos A. Coello Coello, and David Corne, editors, *First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pages 126–140. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science No. 1993, 2001.
- [9] Carlos A. Coello Coello, David A. Van Veldhuizen, and Gary B. Lamont. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Kluwer Academic Publishers, New York, May 2002. ISBN 0-3064-6762-3.

- [10] David W. Corne, Joshua D. Knowles, and Martin J. Oates. The Pareto Envelope-based Selection Algorithm for Multiobjective Optimization. In Marc Schoenauer, Kalyanmoy Deb, Günter Rudolph, Xin Yao, Evelyne Lutton, Juan Julian Merelo, and Hans-Paul Schwefel, editors, *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*, pages 839–848, Paris, France, 2000. Springer. Lecture Notes in Computer Science No. 1917.
- [11] Y. Crama and M. Schyns. Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *Universit de Lige*, GEMME 991, 1999.
- [12] Charles Robert Darwin. *El Origen de las Especies*. SARPE, España, 1983.
- [13] Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa. Siglo xviii: Hacia la teoría de la evolución biológica, charles darwin y el origen de las especies. *Sitio internet del ILCE*, 2004.
- [14] Bolsa Mexicana de Valores. Glosario. *Sitio internet de BMV*, 2004.
- [15] Kalyanmoy Deb, Samir Agrawal, Amrit Pratab, and T. Meyarivan. A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II. In Marc Schoenauer, Kalyanmoy Deb, Günter Rudolph, Xin Yao, Evelyne Lutton, Juan Julian Merelo, and Hans-Paul Schwefel, editors, *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*, pages 849–858, Paris, France, 2000. Springer. Lecture Notes in Computer Science No. 1917.
- [16] Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal, and T. Meyarivan. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197, April 2002.
- [17] K. Doerner, W. Gutjahr, R. Hartl, C. Strauss, and C. Stummer. Pareto ant colony optimization: A metaheuristic approach to multiobjective portfolio selection, 2002.
- [18] Matthias Ehrgott, Kathrin Klamroth, and Christian Schwehm. An MCDM approach to portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, 155(3):752–770, jun 2004.
- [19] E. J. Elton and M. J. Gruber. *Finance as a Dynamic Process*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [20] Mark Erickson, Alex Mayer, and Jeffrey Horn. The Niche Pareto Genetic Algorithm 2 Applied to the Design of Groundwater Remediation Systems. In Eckart Zitzler, Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Carlos A. Coello Coello, and David Corne, editors,

- First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pages 681–695. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science No. 1993, 2001.
- [21] Frank J. Fabozzi, Francis Gupta, and Harry M. Markowitz. The legacy of modern portfolio theory. (financial analysis ideas of harry markowitz). *Journal of Investing*, 11 i3(2):7–23, Fall 2002.
 - [22] Jonathan E. Fieldsend, John Matatko, and Ming Peng. Cardinality constrained portfolio optimisation. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning (IDEAL'04)*, volume Lecture Notes in Computer Science (LNCS 3177), pages 788–793. Z.R. Yang, R. Everson and H. Yin (Eds.), Springer, August 25-27 2004.
 - [23] Jonathan E. Fieldsend and Sameer Singh. Pareto Multi-Objective Non-Linear Regression Modelling to Aid CAPM Analogous Forecasting. In *Proceedings of the IEEE/INNS Joint International Conference on Neural Networks (ICNN'02). World Congress on Computational Intelligence*, volume 1, pages 388–393. IEEE, may 2002.
 - [24] Carlos M. Fonseca and Peter J. Fleming. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization. In Stephanie Forrest, editor, *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, pages 416–423, San Mateo, California, 1993. University of Illinois at Urbana-Champaign, Morgan Kauffman Publishers.
 - [25] M. Gertz and S. Wright. Object-oriented software for quadratic programming, 2001.
 - [26] Héctor Salas Harms. La teoría de cartera y algunas consideraciones epistemológicas acerca de la teorización en las áreas económico-administrativas. *Revista Contaduría y Administración*, (208):37–52, enero-marzo 2003.
 - [27] Jeffrey Horn, Nicholas Nafpliotis, and David E. Goldberg. A Niche Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. In *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence*, volume 1, pages 82–87, Piscataway, New Jersey, June 1994. IEEE Service Center.
 - [28] James C. Van Horne. *Administración Financiera*. Prentice Hall Hispanoamericana, México, 10th edition, 1997.
 - [29] Sir Julian Huxley and H. D. B. Kettlewell. *Darwin*. Salvat, España, 1984.
 - [30] Inversionista. La guía del dinero. *Inversionista Finanzas Públicas*, 2004.

- [31] ITESM and ITAM. Introducción a los mercados financieros de México y a la bolsa mexicana de valores. *Sitio internet del Banco Nacional de México*, 2004.
- [32] Peter Jackel. *Monte Carlo Methods in Finance*. John Wiley & Sons, USA, book & cd edition, April 11, 2002.
- [33] Joshua D. Knowles and David W. Corne. Approximating the Nondominated Front Using the Pareto Archived Evolution Strategy. *Evolutionary Computation*, 8(2):149–172, 2000.
- [34] Angel Kuri-Morales and José Galaviz-Casas. *Algoritmos Genéticos*. Fondo de Cultura Económica - IPN - UNAM, México, 1a edition, 2002.
- [35] George P. Landow. Darwin's on the origin of species (1859). *Victorian Web of National University of Singapore*, 1998-2004.
- [36] Dan Lin, Shouyang Wang, and Hong Yan. A multiobjective genetic algorithm for portfolio selection. Working Paper, Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, 2001.
- [37] H. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):77–91, march 1952.
- [38] H. Markowitz. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Blackwell, New York, 2nd edition, 1991, John Wiley & Sons, 1959, Yale University Press, 1970.
- [39] H. Markowitz, G. Peter Todd, and William F. Sharpe. *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. John Wiley & Sons, USA, 1st edition, february 2000, Basil Blackwell, 1987.
- [40] Jason McVean. Monte carlo: An alternate approach to efficient frontierbalancing portfolio risk and return with efficient frontier, 2005.
- [41] Domingo Jorge Messuti, Víctor Adrián Alvarez, and Hugo Romano Graffi. *Selección de Inversiones. Introducción a la teoría de la cartera (portfolio theory)*. Ediciones Macchi, Buenos Aires - Argentina, 1992.
- [42] Amitabha Mukerjee, Rita Biswas, Kalyanmoy Deb, and Amrit P Mathur. Multiobjective evolutionary algorithms for the risk-return trade-off in bank loan management. In *International Transactions in Operational Research*, volume 9, pages 583–597. Blackwell Publishers Ltd., march 2002.
- [43] NAFINSA. Glosario. *Sitio internet de NAFINSA*, 2004.

- [44] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. 3rd edn (1953) Princeton University Press, Princeton (Nueva Jersey), 1944.
- [45] John Von Neumann. Zur theorie der gessellschaftspiele. volume VI, pages 295–320, (Translated as On the Theory of Games of Strategy, pp.13-42 in Contributions to the Theory of Games, Volume IV (Annals of Mathematics Studies, 40) (A.W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Princeton University Press, Princeton, 1959), 1928. Mathematische Annalen100.
- [46] Dennis O’Neil. Pre-darwinian theories, darwin and natural selection. *EARLY THEORIES OF EVOLUTION: 17th-19th Century Discoveries that Led to the Acceptance of Biological Evolution*, 1998–2004.
- [47] A. Osyczka. Multicriterion optimization in engineering with fortran programs. *Ellis Horwood Limited*, 1984.
- [48] V. Pareto. *Cours D’Economie Politique*. Volume I and II, F. Rouge, Lausanne, 1896.
- [49] Ma. Elena Pérez, Ricardo del Olmo, and Francisco Herrera. The formation of efficient portfolios using multiobjective genetic algorithms. *Technical Report DECSAI-00-01-26*, Oct 2000.
- [50] R. S. Rosenberg. *Simulation of genetic populations with biochemical properties*. Ph. D. thesis, University of Michigan, Ann Harbor, Michigan, 1967.
- [51] P.A. Samuelson. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics*, (51):239–246, 1969.
- [52] J. David Schaffer. Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms. In *Genetic Algorithms and their Applications: Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, pages 93–100. Lawrence Erlbaum, 1985.
- [53] Frank Schlottmann and Detlef Seese. *Financial Applications of Multi-objective Evolutionary Algorithms: recent developments and future research directions*. Coello-Coello, C.; Lamont, G. (eds.), World Scientific Singapore, 2004. ISBN 981-256-106-4.
- [54] Jaqueline S. Shoaf. *Indirect solution representation in genetic algorithms with an application to the efficient set problem*. University of Idaho, 1998.
- [55] Jaqueline S. Shoaf and James A. Foster. A Genetic Algorithm Solution to the Efficient Set Problem: A Technique for Portfolio Selection Based on the Markowitz Model.

- In *Proceedings of the Decision Sciences Institute Annual Meeting*, pages 571–573, Orlando, Florida, 1996.
- [56] Jaqueline S. Shoaf and James A. Foster. The efficient set GA for stock portfolios. In *Proc. Int. Conf. on Evolutionary Computing (CEC)*. IEEE Press, 1998.
- [57] María Margarita Reyes Sierra. *Estudio de algunos aspectos teóricos de los Algoritmos Genéticos*. Maestría en Inteligencia Artificial, Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, México, October 2002. (In Spanish).
- [58] N. Srinivas and Kalyanmoy Deb. Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms. *Evolutionary Computation*, 2(3):221–248, Fall 1994.
- [59] Felix Streichert, Holger Ulmer, and Andreas Zeli. Comparing discrete and continuous genotypes on the constrained portfolio selection problem.
- [60] Felix Streichert, Holger Ulmer, and Andreas Zeli. Evolutionary algorithms and the cardinality constrained portfolio optimization problem.
- [61] Felix Streichert, Holger Ulmer, and Andreas Zell. Evaluating a Hybrid Encoding and Three Crossover Operators on the Constrained Portfolio Selection Problem. In *2004 Congress on Evolutionary Computation (CEC'2004)*, volume 1, pages 932–939, Portland, Oregon, USA, June 2004. IEEE Service Center.
- [62] Gregorio Toscano Pulido. Optimización Multiobjetivo Usando un Micro Algoritmo Genético. Master's thesis, Maestría en Inteligencia Artificial, Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, México, September 2001. (In Spanish).
- [63] Robert R. Trippi and Jae K. Lee. *Artificial Intelligence in Finance & Investing: State-Of-The-Art Technologies for Securities Selection and Portfolio Management*. Irwin Professional Publishing, Frank Fabozzi, Editor, revised edition, the journal of portfolio management edition, January 1, 1996.
- [64] Manuel Valenzuela-Rendón and Eduardo Uresti-Charre. A Non-Generational Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. In Thomas Bäck, editor, *Proceedings of the Seventh International Conference on Genetic Algorithms*, pages 658–665, San Mateo, California, July 1997. Michigan State University, Morgan Kaufmann Publishers.
- [65] Ganesh Vedarajan, Louis Chi Chan, and David Goldberg. Investment portfolio optimization using genetic algorithms. In John R. Koza, editor, *Late Breaking Papers at the 1997 Genetic Programming Conference*, pages 255–263, Stanford University, CA, USA, 13–16 July 1997. Stanford Bookstore.

- [66] Eckart Zitzler, Marco Laumanns, and Lothar Thiele. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm. Technical Report 103, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, Gloriastrasse 35, CH-8092 Zurich, Switzerland, May 2001.
- [67] Eckart Zitzler and Lothar Thiele. Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4):257–271, November 1999.

A

Apéndice Financiero

En el presente apéndice⁵¹ se explican brevemente los principales conceptos en Finanzas que pueden ser de ayuda para comprender el entorno del problema de selección de instrumentos financieros para la creación de portafolios eficientes de inversión⁵².

A.1 El Mercado de Valores en México

En nuestro país existen dos sitios formales en donde se compran y venden valores, la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer). La finalidad es proveer la infraestructura y servicios necesarios para realizar el intercambio de valores entre los agentes interesados. Esto es, ponen en contacto al público inversionista, que es quien está dispuesto a canalizar sus recursos monetarios (ahorro) buscando obtener ganancias, con aquellos que requieren recursos monetarios, los emisores de valores, logrando con ello que las transacciones se realicen en forma ordenada, oportuna y transparente.

El mercado de valores se divide en dos:

1) El *mercado de valores organizado* es el conjunto de instituciones que se dedican a la emisión, colocación y distribución de instrumentos financieros a través de la BMV.

2) El *mercado OTC* (Over the Counter) se dedica a la intermediación de papeles del mercado de deuda y de capitales negociados fuera de la bolsa en el llamado *mercado de mostrador*.

Tratándose propiamente de la naturaleza de los valores, existen dos tipos de mercado de valores: el mercado de capitales y el mercado de deuda.

A.1.1 Mercado de Capitales

Opera inversiones a largo plazo con renta o rendimiento variable, son valores emitidos por empresas, no garantizan rendimientos y tienen un alto riesgo (acciones,

⁵¹ Se respetará el uso del tecnicismo financiero *valor*, el cual ha sido referido como *instrumento financiero*, a lo largo de este documento.

⁵² La información contenida se tomó de los sitios en internet de NACIONAL FINANCIERA [43], la BOLSA MEXICANA DE VALORES [14] y del BANCO NACIONAL DE MÉXICO-ITESM [31]; de MESSUTI [41] y de una edición especial de la revista EL INVERSIONISTA [30].

obligaciones).

A.1.2 Mercado de Deuda

Opera valores representativos de una deuda que es contraída por una emisora del instrumento financiero, la cual está obligada a pagar el valor nominal en una sola exhibición en la fecha de vencimiento (*bonos cupón cero*), o bien mediante varios pagos o amortizaciones realizados entre la emisión y el vencimiento. Para operaciones a corto, mediano y largo plazo con rendimiento fijo que es previamente establecido. Son valores emitidos por el Gobierno Federal (CETES, BONDES, bonos IPAB, UDIBONOS, etc.) empresas privadas (papel comercial, pagaré de mediano plazo en UDIS o tasa nominal), y bancos (aceptaciones bancarias, pagaré bancario, bono bancario). Se caracteriza por una elevada liquidez y bajo riesgo con un rendimiento ligeramente mayor a la inflación.

A.1.3 Otra modalidad: el Mercado de Divisas

Es un mercado altamente especulativo y de alto riesgo, en el que se pueden obtener grandes ganancias o fuertes pérdidas en un lapso muy corto de tiempo. Se basa en los tipos de cambio fluctuantes (volatilidad), donde la cotización de una divisa es determinada por el mercado, o sea por el precio que determina su oferta y demanda; así las variaciones en el precio de las divisas son aprovechadas por los agentes económicos nacionales e internacionales.

A.2 Participantes del Mercado de Valores

A.2.1 Entidades Emisoras (emisor)

Entidad pública (organismo) o privada (empresa) que coloca algún activo o pasivo referido como valor en el mercado de valores (emisión), para ello debe estar representada por una casa de bolsa. En el caso de la emisión de acciones, las empresas que deseen realizar una oferta pública deberán cumplir con los requisitos de listado y posteriormente, con los requisitos de mantenimiento establecidos por la BMV; además de las disposiciones de carácter general contenidas en las circulares emitidas por la CNBV.

A.2.2 Intermediarios bursátiles

Son las casas de bolsa autorizadas para actuar en el mercado bursátil. Sus principales actividades son:

- Realizar operaciones de compraventa de valores;
- Brindar asesoría a las empresas en la colocación de valores y a los inversionistas en la constitución de sus carteras;
- Recibir fondos por concepto de operaciones con valores, y por realizar transacciones con valores a través del sistema BMV-SENTRA Capitales (Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación del Mercado de Capitales), a través de sus operadores.

Los operadores de las casas de bolsa deben estar registrados y autorizados por la CNBV y la BMV. Las comisiones que las casas de bolsa cobran a sus clientes por el servicio de compra-venta de acciones están sujetas a negociación entre las partes.

A.2.3 Inversionistas

Personas físicas o morales, nacionales o extranjeras que a través de una casa de bolsa colocan sus recursos a cambio de valores, para obtener rendimientos. En los mercados bursátiles del mundo, destaca la participación del grupo de los llamados *inversionistas institucionales* representado por sociedades de inversión, fondos de pensiones, así como de otras entidades con alta capacidad de inversión y amplio conocimiento del mercado y de sus implicaciones.

A.2.4 Autoridades y Organismos Autoregulatorios.

Fomentan y supervisan la operación ordenada del mercado de valores y sus participantes conforme a la normatividad vigente. En México las instituciones reguladoras son la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), el Banco de México (Banxico) y la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

A.3 Elementos básicos de una inversión.

A.3.1 Rendimiento.

Es la ganancia que se obtiene al realizar una inversión y normalmente se obtiene después de cumplirse uno o varios plazos de tiempo. El rendimiento se ve disminuido al aplicarle impuestos y comisiones. Se dice que a mayor plazo se obtiene mayor madurez de la inversión, lo que genera mayor rendimiento.

Se puede otorgar de dos formas:

- Dividendos (intereses) que genera la emisora.
- Ganancias o pérdidas de capital, que es el diferencial entre el precio de compra y el precio de venta del valor y/o amortizaciones.

A.3.2 Riesgo.

Es la posibilidad que siempre existe de que se pueda obtener poco o ningún rendimiento, e incluso disminuir o perder la inversión original. Eventos económicos, políticos, sociales y naturales pueden influenciar el comportamiento de las inversiones, generando desempleo, desequilibrios fiscales, económicos y de la cuenta externa, etc. complicando el funcionamiento de los mercados financieros, cambiando con ello las expectativas de rentabilidad y riesgo de los portafolios, y de los flujos de efectivo.

A.3.3 Plazo.

Es el periodo de tiempo durante el cual se realiza una inversión, desde su compra hasta su venta o vencimiento; lapso en el que normalmente no se puede disponer de lo invertido.

A.3.4 Liquidez.

Es la facilidad con la que se puede convertir la inversión en dinero, particularmente durante periodos en los que se están observando incrementos sustanciales en las tasas de interés. Esto es por ejemplo, vendiendo los instrumentos financieros a un tercero (en el mercado de valores) aunque se accede a un menor rendimiento, debido a que se comparte éste con el tercero.

A.3.5 Diversificación.

Consiste en repartir y compensar el riesgo, mediante la adquisición de instrumentos financieros con diferentes rendimientos, riesgos, plazos y liquidez, con el fin de armar un portafolio de instrumentos financieros que *en promedio* prometa un rendimiento y riesgo acordes con los requeridos por el inversionista. Se diversifican las inversiones operando instrumentos financieros en los distintos mercados, con diferentes niveles de liquidez, entre diferentes emisoras de sectores distintos, en divisas, en bienes raíces, en metales, en diferentes inversiones financieras, etc. para equilibrar las pérdidas y ganancias con el fin de diluir las bajas coyunturales del mercado o de las propias acciones

A.4 Correlación.

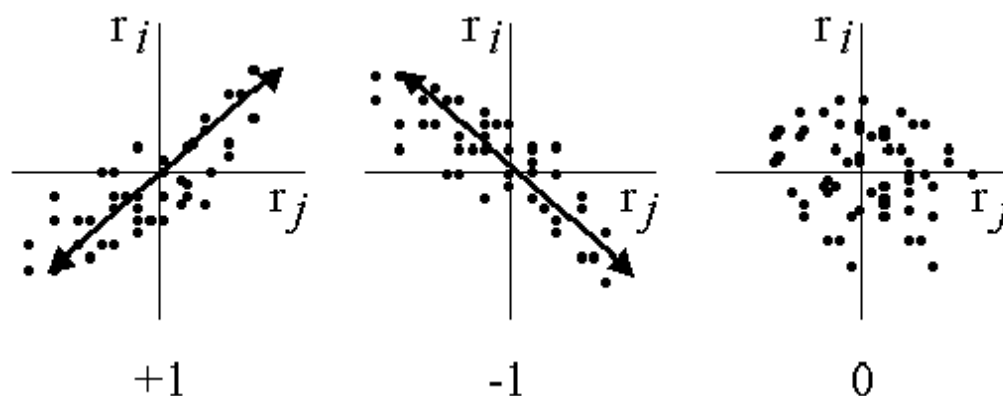


Fig. A.36. Coeficiente de correlación y relación entre instrumentos: ρ_{ij}

El valor de un coeficiente de correlación siempre está en los límites de -1 a $+1$. Un coeficiente de correlación de $+1$ indica que un aumento en el rendimiento de un instrumento siempre está asociado con un incremento proporcional en el rendimiento del otro instrumento financiero, y en forma similar para las reducciones. Un coeficiente de correlación de -1 indica que un incremento en el rendimiento de un instrumento financiero siempre está asociado con una reducción proporcional en el rendimiento del otro instrumento financiero y viceversa. Un coeficiente de cero indica una ausencia de correlación; de manera que los rendimientos de cada instrumento

financiero varían en forma independiente uno de otro. Sin embargo, la mayoría de los rendimientos de las acciones tienden a moverse juntos, de manera que el coeficiente de correlación entre dos instrumentos financieros es positivo⁵³.

A.5 División del riesgo

Resulta conveniente dividir el riesgo total de un instrumento financiero (la desviación estándar de sus rendimientos) en una parte que pertenece a esa empresa en particular que puede ser eliminado por diversificación, y otra que pertenece al mercado que no es diversificable. El primero se conoce como *riesgo no sistemático* del instrumento financiero y el segundo como su *riesgo sistemático o de mercado*, el cual caracteriza al sistema general o entorno de la empresa. Estos mismos términos se aplican para referirse al riesgo total de una cartera.

A.6 Riesgos y rentabilidad en el mercado

Se dice que los *mercados son eficientes* cuando los precios de los valores se ajustan con mucha rapidez debido a que reflejan plenamente toda la información disponible, y cuando hay carencia de oportunidades de arbitraje de los valores, pues éstas fueron eliminadas por los árbitros. Arbitraje es que un accionista encuentre dos valores idénticos en esencia, y que por alguna imperfección de mercado, su precio no sea igual⁵⁴; por lo que procederá a comprar el valor más barato y vender el más caro. Cuando otros inversionistas reconozcan esta oportunidad de arbitraje, harán lo propio; por lo que la venta ejercerá una presión en el precio hacia la baja, mientras que la compra lo presionará hacia la alza; provocando que se ajusten los precios de los valores.

No obstante, las caídas estrepitosas de los mercados bursátiles hacen dudar de la eficiencia de los mercados financieros. La tendencia de crecimiento en los mercados de valores a lo largo del tiempo, es de incrementos relativamente pequeños; mientras que las bajas son más pronunciadas. Se tiene la sensación de que la eficiencia del mercado explica convenientemente su propio comportamiento la mayor parte del tiempo y que aparentemente existe una correcta asignación de precios de los valores; pero también hay excepciones que ponen en duda el hecho de que los precios del mercado incorporen toda la información disponible y, por tanto, si es que se puede confiar en ellos totalmente.

⁵³ Observación realizada por James C. Van Horne. Esto debe considerarse con cautela, ya que no todos los mercados financieros se comportan de igual manera.

⁵⁴ Situación que comúnmente ocurre en plazas o mercados distintos geográficamente.

A.7 Instrumentos Financieros.

La inversión de los recursos se puede realizar en diferentes tipos de instrumentos financieros, como bancarios, gubernamentales o bursátiles, así como en divisas.

Los *instrumentos bancarios* especifican la tasa de rendimiento que pagarán al vencimiento de un plazo específico. Son inversiones seguras, pero toda inversión posee un nivel de riesgo, esto sin contar que existen algunos intermediarios financieros que no otorgan ninguna garantía al inversionista en caso de quiebra.

Cualquier inversión no está libre de riesgo. Siempre existe la posibilidad del no pago por parte del emisor, debido normalmente a los constantes, y en algunos casos abruptos, cambios en la economía que afectan a las tasas de interés y en consecuencia el rendimiento esperado. El único emisor con riesgo cero de no pago (en moneda nacional) es el *Gobierno*.

Los *instrumentos bursátiles* son títulos o bonos (valores) que se compran y venden dentro del mercado de valores. Así se clasifican en tres categorías:

- 1) Instrumentos de deuda a corto plazo
- 2) Instrumentos de deuda a largo plazo
- 3) Las acciones

B

Glosario

La intención del presente glosario⁵⁵ es ofrecer un conjunto de definiciones breves de los términos financieros utilizados en el desarrollo de este documento⁵⁶.

Acciones. Representan una parte del capital de una empresa por lo que son una participación de su propiedad; otorga a sus tenedores (socios) el derecho a participar de los beneficios de la empresa (*e.g.* dividendos). No tienen fecha de vencimiento. Requieren de un largo plazo para adquirir mayor madurez del rendimiento. Estos títulos son presentados a los inversionistas a través de la Bolsa Mexicana de Valores.

Activos financieros. Son derechos sobre otros activos y se pactan en forma escrita en documentos, por ejemplo acciones, bonos, etc.

Análisis fundamental. Se dedica al estudio recurrente de la información financiera de la emisora, Balance General y Estado de Resultados, con el fin de evaluar el comportamiento futuro de sus ventas y utilidades, principalmente, y determinar las ventajas de comprar o vender la acción.

Aversión al riesgo. Ver **Individuo averso al riesgo**.

Banco. Es una institución que capta recursos del público y presta dichos recursos a plazos que no tienen porqué coincidir con los términos a los cuales los captó; transforma los activos financieros.

Bursatilidad. Indicador de los niveles de compra o venta de una acción, a través del volumen de acciones que se intercambia diariamente.

Casa de Bolsa. Facilita el contacto y el intercambio entre los poseedores de acciones y posibles compradores de ellas; transmite los activos financieros.

Cartera. Ver **Portafolio de inversión**.

Composición. Distribución de activos dentro de un portafolio de inversión.

Conjunto eficiente. Ver **Problema del conjunto eficiente**.

Diversificación. Ver *idem* en la sección A.3.5.

Dividendos. Pagos que las empresas hacen a sus accionistas cuando obtienen utilidades. Pueden ser en efectivo o en acciones.

Emisor. Ver **Entidades Emisoras (emisor)** en la sección A.2.1.

Especulación. Inversión a corto plazo, con alto riesgo y la expectativa de alto rendimiento.

Estados Financieros. Informes que reflejan la situación financiera de una empresa. Los más conocidos son el Balance General y el Estado de Pérdidas y Ganancias. El primero refleja la situación a un instante determinado. El segundo está referido a

⁵⁵ Se respetará el uso del tecnicismo financiero *valor*, el cual ha sido referido como *instrumento financiero*, a lo largo de este documento.

⁵⁶ La información contenida se tomó de los sitios en internet de NACIONAL FINANCIERA [43] y la BOLSA MEXICANA DE VALORES [14], y de una edición especial de la revista EL INVERSIONISTA [30].

un periodo y muestra el origen de las pérdidas o ganancias del periodo. Otro estado financiero importante es el de Fuentes y Usos de Fondos, que muestra el origen y la aplicación de los flujos de caja del periodo, permitiendo identificar el financiamiento de las pérdidas y el destino de las ganancias.

Fondo de inversión. Ver **Sociedades de inversión.**

Función de utilidad. Ver **Teoría de utilidad.**

Índice de precios y cotizaciones. Este índice es un indicador del comportamiento del mercado accionario (renta variable). Es, en términos breves, un promedio ponderado de los precios de las acciones de un conjunto de emisoras que se consideran las más representativas del mercado mexicano.

Indiferencia al riesgo. Ver **Individuo indiferente al riesgo.**

Individuo averso al riesgo. El que tiene una función cóncava de utilidad marginal con tendencia decreciente. El que prefiere un rendimiento cierto a uno incierto con igual valor esperado.

Individuo indiferente al riesgo. El que tiene una función constante de utilidad marginal. El que no tiene en cuenta el riesgo.

Individuo propenso al riesgo. El que tiene una función convexa de utilidad marginal con tendencia creciente. El que considera que a incrementos iguales en la riqueza le corresponden incrementos crecientes de su nivel de satisfacción.

Instrumentos Financieros. Ver *ídem* en la sección A.7.

Intermediarios financieros. Son los diferentes tipos de instituciones que participan en el mercado financiero en México.

Inversión. Se realiza cuando sacrificamos el consumo presente a cambio de una promesa de un consumo futuro de mayores beneficios.

Inversionista. Ver **Inversionistas** en la sección A.2.3.

Liquidez. Ver *ídem* en la sección A.3.4.

Mercado de Deuda. Ver *ídem* en la sección A.1.2.

Mercado de Capitales. Ver *ídem* en la sección A.1.1.

Mercado de Valores mexicano. Ver **El Mercado de Valores en México** en la sección A.1.

Plazo. Ver *ídem* en la sección A.3.3.

Plazo de vencimiento. Es el periodo de tiempo sobrante del plazo original (desde que fue emitido) de un instrumento financiero desde la fecha actual hasta su maduración.

Portafolio de inversión. Conjunto de instrumentos financieros que cumple con los objetivos de liquidez, rendimiento, plazo y riesgo fijados por el inversionista.

Posición corta. En una venta corta, el inversionista pide prestados valores y los vende en el mercado. Con el tiempo se deben reemplazar estos valores y se hace esto comprándolos en el mercado. A menudo una venta corta anticipa una baja en el precio de manera que los valores pueden reemplazarse a un precio inferior que aquel por el cual se vendieron.

Posición larga. Estos son valores comprados por el inversionista a precio de mercado actual con la esperanza de que el valor de las acciones aumente en el futuro.

Problema del conjunto eficiente. Es el problema de encontrar una asignación de portafolio tal que la tasa esperada del rendimiento del portafolio no pueda ser mejo-

rada por igual o menor nivel de riesgo.

Propensión al riesgo. Ver **Individuo propenso al riesgo**.

Rendimiento. Ver *idem* en la sección A.3.1.

Renta fija. Es un instrumento financiero del cual se conoce desde su adquisición el plazo de la inversión y el rendimiento que producirá; a pesar de ello, estas condiciones pueden modificarse en el tiempo. Estas inversiones ofrecen un rendimiento cierto nominal, pero su rendimiento real es aleatorio por cuanto también lo es la tasa de inflación.

Renta variable. Término que se aplica a las acciones porque su rendimiento varía.

Riesgo. Ver *idem* en la sección A.3.2.

Sociedades de inversión. Son sociedades anónimas constituidas con el objeto de adquirir valores y documentos seleccionados de acuerdo con el criterio de diversificación de riesgos, con recursos provenientes de la colocación de las acciones representativas de su capital social entre pequeños y medianos inversionistas.

Tasa de interés. Número decimal o porcentual, a través del cual se especifican las cantidades que por concepto de interés pagan algunos instrumentos financieros.

Tasa de rendimiento. Rendimiento expresado en forma decimal o porcentual.

Tenedor del instrumento. Persona que es propietaria de un instrumento financiero por un plazo específico de tiempo.

Teoría de utilidad. Se refiere a un conjunto de alternativas entre las que se define una relación de indiferencia y una relación de preferencia. Sitúa al criterio de máximo rendimiento esperado en un marco más general, que lo comprende como un caso particular con una actitud de neutralidad hacia el riesgo.

Valores. Acciones, títulos, bonos, papel comercial, deuda, obligaciones, etc.

C

Detalle del cálculo de métricas

Se detallan los resultados obtenidos al aplicar las métricas de desempeño.

		MV_F02			
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	19	21	20.07	19.87
	2000	19	22	19.50	19.27
	2001	19	20	19.35	19.21
	2002	20	21	20.27	20.27
	2003	20	21	20.48	20.42
	99-04	20	22	20.42	20.38
KP_PAES	1999	95	120	103.35	101.50
	2000	98	104	99.50	99.00
	2001	97	123	102.30	100.00
	2002	104	126	108.55	108.00
	2003	96	130	102.60	100.00
	99-04	103	121	107.95	106.00
KP_NSGA2	1999	58	61	59.10	59.00
	2000	58	61	59.20	59.00
	2001	59	60	59.20	59.00
	2002	59	61	59.50	59.00
	2003	59	61	59.40	59.00
	99-04	59	61	59.55	59.50

Tabla C.75. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F02.

MV_F02_CC4					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	850	937	882.34	875.46
	2000	799	970	854.45	846.09
	2001	810	913	840.67	827.38
	2002	812	912	854.98	855.45
	2003	807	912	844.69	843.51
	99-04	793	872	841.55	845.37
KP_PAES	1999	122	169	140.75	141.50
	2000	104	151	122.85	117.50
	2001	102	154	120.60	121.00
	2002	112	220	163.30	166.50
	2003	135	222	164.65	162.00
	99-04	102	164	128.45	127.50
KP_NSGA2	1999	58	59	58.30	58.00
	2000	58	60	58.55	58.50
	2001	58	60	58.55	58.50
	2002	58	59	58.35	58.00
	2003	58	59	58.40	58.00
	99-04	58	59	58.50	58.50

Tabla C.76. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F02_CC4.

MV_F02_CC8					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	867	992	914.89	916.86
	2000	829	917	874.15	882.37
	2001	828	970	878.97	870.59
	2002	825	954	892.86	892.09
	2003	822	894	862.58	860.46
	99-04	822	923	867.80	855.08
KP_PAES	1999	116	148	131.35	131.50
	2000	110	133	122.85	122.00
	2001	102	178	119.00	116.00
	2002	128	213	176.85	177.50
	2003	116	186	140.90	136.00
	99-04	117	177	137.55	134.00
KP_NSGA2	1999	58	59	58.30	58.00
	2000	58	60	58.50	58.00
	2001	58	60	58.80	59.00
	2002	58	60	58.45	58.00
	2003	58	59	58.75	59.00
	99-04	58	60	58.55	58.50

Tabla C.77. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F02_CC8.

MV_F02_CC12					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	863	985	919.18	923.71
	2000	842	960	894.49	893.79
	2001	799	927	878.37	884.12
	2002	861	968	896.52	890.54
	2003	853	957	903.93	907.98
	99-04	842	963	894.75	893.61
KP_PAES	1999	121	151	130.65	128.50
	2000	121	150	130.75	129.00
	2001	104	137	119.25	117.50
	2002	155	227	182.75	185.00
	2003	122	171	135.05	131.00
	99-04	139	187	159.10	157.50
KP_NSGA2	1999	58	60	58.60	59.00
	2000	58	60	58.65	59.00
	2001	58	60	58.75	59.00
	2002	58	59	58.35	58.00
	2003	58	59	58.70	59.00
	99-04	58	60	58.50	58.00

Tabla C.78. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F02_CC12.

MV_F02_CC26					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	1200	1373	1267.65	1254.81
	2000	1045	1269	1173.88	1175.55
	2001	1084	1210	1160.53	1158.77
	2002	1256	1438	1357.24	1358.48
	2003	1184	1310	1255.39	1258.34
	99-04	1184	1311	1248.69	1236.25
KP_PAES	1999	101	135	112.55	110.50
	2000	93	127	106.45	105.00
	2001	92	120	100.55	98.50
	2002	128	233	148.35	142.00
	2003	94	129	106.30	102.50
	99-04	117	143	126.85	126.50
KP_NSGA2	1999	58	60	58.50	58.00
	2000	58	60	58.85	59.00
	2001	58	61	59.00	59.00
	2002	58	60	58.80	59.00
	2003	58	60	58.90	59.00
	99-04	58	59	58.65	59.00

Tabla C.79. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F02_CC26.

MV_F03					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	25	28	25.94	25.83
	2000	24	29	24.92	24.56
	2001	24	26	25.09	25.12
	2002	26	27	26.27	26.26
	2003	25	30	26.14	25.95
	99-04	25	30	25.99	25.59
KP_PAES	1999	114	131	122.60	122.50
	2000	120	135	126.30	126.00
	2001	109	135	125.50	129.00
	2002	118	144	138.25	140.00
	2003	118	136	127.15	128.50
	99-04	106	144	136.75	139.00
KP_NSGA2	1999	60	62	61.00	61.00
	2000	60	62	61.00	61.00
	2001	60	63	61.00	61.00
	2002	60	62	61.00	61.00
	2003	61	62	61.05	61.00
	99-04	61	63	61.20	61.00

Tabla C.80. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F03.

MV_F03_CC4					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	860	973	910.77	913.47
	2000	840	975	892.94	889.08
	2001	822	920	874.41	878.61
	2002	834	943	877.08	866.84
	2003	845	960	889.23	889.63
	99-04	832	959	881.55	881.40
KP_PAES	1999	239	346	277.20	270.00
	2000	250	355	305.90	302.00
	2001	195	281	243.40	245.00
	2002	325	425	359.75	359.50
	2003	191	258	218.10	221.50
	99-04	279	395	325.60	323.50
KP_NSGA2	1999	59	61	59.80	60.00
	2000	59	60	59.65	60.00
	2001	59	61	59.65	60.00
	2002	59	60	59.50	59.50
	2003	59	62	60.00	60.00
	99-04	59	60	59.70	60.00

Tabla C.81. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F03_CC4.

MV_F03_CC8					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	897	1051	959.74	955.22
	2000	842	966	904.03	909.45
	2001	841	962	900.90	892.91
	2002	879	998	928.68	929.78
	2003	854	1042	912.30	911.76
	99-04	847	979	923.14	939.92
KP_PAES	1999	226	338	269.05	263.00
	2000	227	382	315.05	315.00
	2001	191	283	230.45	230.00
	2002	319	429	373.65	378.50
	2003	200	294	229.60	228.00
	99-04	261	373	308.55	304.00
KP_NSGA2	1999	59	60	59.90	60.00
	2000	59	61	60.00	60.00
	2001	60	62	60.25	60.00
	2002	60	60	60.00	60.00
	2003	60	61	60.40	60.00
	99-04	60	69	61.30	60.50

Tabla C.82. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F03_CC8.

MV_F03_CC12					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	934	1115	1017.42	1007.33
	2000	871	1035	950.31	948.25
	2001	862	1008	942.14	931.75
	2002	888	1060	998.01	1005.23
	2003	887	1043	960.26	951.30
	99-04	891	1047	963.25	953.40
KP_PAES	1999	222	345	279.00	267.50
	2000	236	363	291.15	284.00
	2001	196	275	224.45	221.00
	2002	298	404	351.20	348.00
	2003	176	284	220.25	220.00
	99-04	277	402	321.25	317.50
KP_NSGA2	1999	59	61	59.90	60.00
	2000	59	61	59.85	60.00
	2001	59	60	59.80	60.00
	2002	59	61	59.65	60.00
	2003	59	61	59.75	60.00
	99-04	59	61	59.70	60.00

Tabla C.83. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F03_CC12.

MV_F03_CC26					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	1444	1640	1553.61	1557.68
	2000	1328	1504	1410.24	1400.17
	2001	1407	1602	1509.99	1512.93
	2002	1881	2388	2122.39	2130.78
	2003	1543	1763	1673.27	1667.50
	99-04	1565	1828	1718.31	1724.43
KP_PAES	1999	167	315	201.90	189.50
	2000	130	177	150.60	150.50
	2001	117	183	145.50	146.50
	2002	230	336	289.65	284.50
	2003	115	211	161.45	158.50
	99-04	174	258	218.80	218.50
KP_NSGA2	1999	60	61	60.05	60.00
	2000	60	62	60.30	60.00
	2001	60	62	60.25	60.00
	2002	59	62	60.20	60.00
	2003	60	62	60.40	60.00
	99-04	59	65	60.90	60.00

Tabla C.84. Tiempos de proceso (expresados en segundos) MV_F03_CC26.

SC MV_F02					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	5	1.8	1
	2000	0	3	0.35	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	3	0.85	1
	2003	0	10	3.05	2.5
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	6	0.8	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	93	16.1	8
	2003	0	19	1.9	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	4	2.25	2
	2000	0	3	1.75	2
	2001	0	2	0.6	0.5
	2002	1	4	1.95	2
	2003	7	18	12.95	13
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_PAES	KP_PAES
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			NA	NA

ISC MV_F02			
(óptimo: mayor valor)			
min	max	media	mediana
13	19	15.85	16
16	28	20.9	21.5
13	23	18.8	19
6	16	11.3	10.5
10	21	17.15	18
48	82	61.95	60
4	16	10.7	11
9	17	13.45	13
8	23	14.8	14.5
3	9	5.95	6
6	17	11.8	11.5
24	55	34.3	33.5
5	11	8.25	8
7	14	10.05	10
5	14	10.85	11.5
2	7	4.3	4
2	10	6.4	7
24	35	28.9	28.5
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.85. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F02.

SC MV_F02_CC4					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	1	0.05	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	1	0.05	0
	2003	0	1	0.05	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	5	0.45	0
	2003	0	2	0.1	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	1	4	2.3	2
	2000	0	4	1.9	2
	2001	0	3	0.6	0
	2002	0	3	0.8	1
	2003	1	4	2.35	2
	99-04	0	2	0.15	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	NA
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	NA

ISC MV_F02_CC4			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
9	22	16.6	17
21	31	25.45	26
4	30	21.5	22
1	25	15.7	19
11	24	17.8	17.5
12	101	63.15	65.5
10	19	15.25	15
12	24	19	19.5
8	23	17.85	18
9	19	12.55	12
2	14	7.25	6.5
18	81	42.95	39
11	16	13.15	13
8	14	11.3	11
10	16	13.8	14
0	5	2.1	2
10	16	12.3	12
13	29	19.2	19.5
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_PAES	KP_PAES
		KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.86. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F02_CC4.

SC MV_F02_CC8					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	50	3	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	5	0.55	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	1	5	1.85	1.5
	2000	1	6	2.15	2
	2001	0	2	0.3	0
	2002	0	3	1.05	1
	2003	0	3	1.9	2
	99-04	0	1	0.05	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	NA
	2002			KP_mAG	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	NA

ISC MV_F02_CC8			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
9	18	13.4	13.5
16	31	24.2	24
9	31	18.85	18.5
2	24	15.15	15.5
6	17	10.5	10
9	96	47.15	41.5
3	12	8.35	8
0	15	8.2	7.5
5	15	10.3	11
0	6	2.1	2
5	14	8.75	8.5
3	27	13.1	13
7	13	10.2	11
5	12	8.05	8
8	15	11.2	11
0	9	4.4	4
7	16	10.2	10
19	35	26.7	28.5
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_NSGA2	KP_PAES	
	KP_PAES	KP_PAES, KP_NSGA2	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_PAES	KP_PAES	

Tabla C.87. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F02_CC8.

SC MV_F02_CC12					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	7	0.8	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	1	0.0909091	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	4	1.95	2
	2000	0	4	1.45	1
	2001	0	1	0.2	0
	2002	0	4	1.55	1
	2003	0	10	3.1	2.5
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	NA
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			NA	NA

ISC MV_F02_CC12			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
6	14	10.5	11
13	28	20.7	21.5
4	17	11.1	11
6	21	10.4	9
5	11	7.65	7.5
10	87	30.05	29
1	6	2.78571	2
0	5	2.15385	2
0	6	3	3
0	2	0.545455	0
2	8	5.25	5.5
1	12	3.17647	3
7	15	11.4	12
8	18	11.85	11.5
8	18	13.75	14
1	8	4.75	5
6	16	9.65	9.5
23	39	30.55	30.5
		KP_PAES	KP_PAES
		KP_PAES	KP_PAES
		KP_PAES	KP_PAES
		KP_PAES	KP_PAES
		KP_PAES	KP_PAES
		KP_PAES	KP_PAES

Tabla C.88. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F02_CC12.

SC MV_F02_CC26					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	2	0.1	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	NA	NA	NA	NA
	2000	NA	NA	NA	NA
	2001	NA	NA	NA	NA
	2002	NA	NA	NA	NA
	2003	NA	NA	NA	NA
	99-04	NA	NA	NA	NA
KP_NSGA2	1999	0	1	0.4	0
	2000	0	2	0.95	1
	2001	0	0	0	0
	2002	1	2	1.4	1
	2003	4	16	9.05	8.5
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	NA
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			NA	NA
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			NA	NA

ISC MV_F02_CC26			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
5	10	6.85	7
9	14	11.55	12
3	5	3.7	3.5
1	4	2.15	2
2	5	3.55	4
6	11	7.4	7
NA	NA	NA	NA
NA	NA	NA	NA
NA	NA	NA	NA
NA	NA	NA	NA
NA	NA	NA	NA
NA	NA	NA	NA
10	20	14.7	14.5
14	22	17.2	17
20	31	24.95	25
3	13	8.75	9
12	19	16.05	16.5
41	71	56.1	56.5
		KP_mAG	KP_mAG
		KP_mAG	KP_mAG
		KP_mAG	KP_mAG
		KP_mAG	KP_mAG
		KP_mAG	KP_mAG
		KP_mAG	KP_mAG

Tabla C.89. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F02_CC26.

SC MV_F03					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ISC MV_F03			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
3	5	4.1	4
6	11	9.25	9.5
3	12	7.35	7
5	9	7.7	8
2	7	3.4	3
15	35	29.7	30
9	19	13.85	14
11	25	16.75	17
4	20	10.3	9.5
0	10	4.1	3
6	17	8.9	9
3	32	18.75	19.5
4	6	4.95	5
9	10	9.85	10
7	11	8.9	9
5	8	6.8	7
3	7	5.1	5
26	33	28.9	29
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_PAES	KP_PAES	

Tabla C.90. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03.

SC MV_F03_CC4					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ISC MV_F03_CC4			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
3	7	5.65	6
7	11	9.1	9
1	12	7.5	7.5
1	9	5.35	6
3	8	5.95	6
3	35	21.8	22.5
0	3	1.05	1
0	5	2.25	2
0	8	3.08333	2.5
0	1	0.2	0
0	6	2.69231	3
1	8	4.2	3
3	6	4.55	4
6	10	8.7	9
5	9	7.15	7
3	8	5.7	6
4	7	4.95	5
20	31	25	25
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_PAES	KP_PAES	

Tabla C.91. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03_CC4.

SC MV_F03_CC8					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ISC MV_F03_CC8			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
3	5	4.45	4.5
4	9	6.9	7
2	7	4.05	4
0	9	4.65	4.5
2	5	3	3
6	30	14.8	13
7	14	9.2	9
6	23	14.25	14.5
3	22	11.15	10.5
1	10	3.1	3
2	14	8.65	9
1	37	16.9474	17
3	6	4.65	5
7	10	9.4	10
5	10	7.75	8
5	8	6.9	7
4	6	4.95	5
24	32	27.8	27.5
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	

Tabla C.92. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03_CC8.

SC MV_F03_CC12					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ISC MV_F03_CC12			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
2	5	3.95	4
5	8	5.7	5.5
1	4	2.45	2
1	7	3.5	3
1	3	2.05	2
4	25	8.95	8
8	17	13.05	13
15	25	20	20
9	29	14.6	13.5
2	16	7.45	7
8	14	10-65	10
4	60	25.85	22.5
4	7	5.3	5
8	11	9.85	10
7	11	9	9
6	9	7.1	7
4	7	5.65	6
27	34	30.5	30
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	

Tabla C.93. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03_CC12.

SC MV_F03_CC26					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ISC MV_F03_CC26			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
2	3	2.1	2
4	5	4.15	4
2	2	2	2
0	2	1.05	1
0	1	0.95	1
2	4	2.85	3
6	8	6.90909	7
11	13	11.7143	12
3	6	4.46154	4
0	1	0.6	1
2	5	2.82353	3
2	4	3.2	3
4	6	5.1	5
10	11	10.35	10
1	12	8.3	10.5
7	9	7.95	8
6	7	6.8	7
31	35	33.7	34
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_PAES	KP_mAG, KP_PAES	
	KP_mAG	KP_mAG	
	KP_mAG	KP_mAG, KP_PAES	

Tabla C.94. Métrica de conteo exitoso (SC: Success Counting) y Métrica de conteo exitoso invertido (ISC: Inverted Success Counting). MV_F03_CC26.

IGD MV_F02					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	2.43E-05	0.000273231	4.63E-05	3.18E-05
	2000	1.96E-05	3.54E-05	2.54E-05	2.45E-05
	2001	3.06E-05	9.25E-05	5.16E-05	4.44E-05
	2002	0.000143667	0.000275663	0.000204876	0.000200726
	2003	2.73E-05	0.000410698	8.43E-05	5.17E-05
	99-04	3.93E-05	7.27E-05	5.23E-05	5.16E-05
KP_PAES	1999	2.82E-05	0.00106859	0.000222106	6.77E-05
	2000	1.94E-05	4.91E-05	3.03E-05	2.99E-05
	2001	3.47E-05	0.00210687	0.000225156	5.24E-05
	2002	0.000130417	0.016009	0.00102155	0.00022563
	2003	2.29E-05	0.000765629	8.55E-05	4.27E-05
	99-04	4.36E-05	0.000242463	9.48E-05	6.72E-05
KP_NSGA2	1999	6.92E-06	1.06E-05	9.02E-06	9.02E-06
	2000	8.09E-06	1.29E-05	1.07E-05	1.09E-05
	2001	1.08E-05	1.78E-05	1.39E-05	1.35E-05
	2002	7.61E-05	0.000114008	9.14E-05	9.07E-05
	2003	7.85E-06	1.38E-05	1.00E-05	9.71E-06
	99-04	1.78E-05	2.33E-05	2.03E-05	2.02E-05
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.95. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02.

IGD MV_F02_CC4					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	5.89E-05	0.000903406	0.000316901	0.000184015
	2000	2.51E-05	0.000848282	0.000267923	0.000130769
	2001	0.000112329	0.00267087	0.000605307	0.000340959
	2002	0.000242306	0.0254778	0.00549108	0.000567888
	2003	0.000130787	0.000471103	0.000237689	0.00021943
	99-04	9.28E-05	0.00484808	0.00112258	0.000342802
KP_PAES	1999	0.00013363	0.00032614	0.000206253	0.00020812
	2000	0.000148352	0.000654936	0.000230471	0.000197453
	2001	0.000153944	0.000737603	0.000285717	0.000246542
	2002	0.00110031	0.00396238	0.00218788	0.00211697
	2003	0.000202402	0.000748155	0.000471354	0.000467212
	99-04	0.000192774	0.00081467	0.000413009	0.000384399
KP_NSGA2	1999	1.91E-05	2.41E-05	2.08E-05	2.06E-05
	2000	9.01E-06	1.35E-05	1.11E-05	1.11E-05
	2001	3.00E-05	9.47E-05	4.78E-05	4.61E-05
	2002	7.92E-05	0.000123791	9.90E-05	9.71E-05
	2003	5.01E-05	8.55E-05	5.76E-05	5.57E-05
	99-04	2.06E-05	4.05E-05	2.86E-05	2.70E-05
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.96. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02_CC4.

IGD MV_F02_CC8					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.000169562	0.000707489	0.000471406	0.000489376
	2000	3.48E-05	0.000585802	0.000214662	0.000161237
	2001	0.000106818	0.00204823	0.000950397	0.000940002
	2002	0.000277825	0.0250617	0.00483761	0.0028526
	2003	0.000200386	0.000748329	0.000477542	0.000482257
	99-04	8.76E-05	0.00516609	0.00241158	0.00262449
KP_PAES	1999	0.000278565	0.00116063	0.000591599	0.000540978
	2000	0.000201674	0.00164248	0.000744751	0.000557727
	2001	0.000493788	0.00260686	0.0012621	0.00112167
	2002	0.00289864	0.0283189	0.0110163	0.00776939
	2003	0.000130781	0.00063544	0.000378056	0.000357766
	99-04	0.000807702	0.00479052	0.00172099	0.00165201
KP_NSGA2	1999	7.37E-06	2.48E-05	1.13E-05	9.82E-06
	2000	9.51E-06	1.44E-05	1.11E-05	1.08E-05
	2001	1.56E-05	3.43E-05	2.23E-05	2.15E-05
	2002	7.22E-05	0.000115034	8.99E-05	9.01E-05
	2003	7.68E-06	3.20E-05	2.24E-05	2.32E-05
	99-04	1.92E-05	2.44E-05	2.13E-05	2.11E-05
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.97. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02_CC8.

IGD MV_F02_CC12					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.000484335	0.000949034	0.000666411	0.000633816
	2000	3.88E-05	0.00130213	0.00050562	0.000307398
	2001	0.000965519	0.00266923	0.00178351	0.00179165
	2002	0.00122752	0.019124	0.011829	0.013022
	2003	0.000486303	0.000829084	0.000670648	0.000682874
	99-04	0.000452869	0.00512159	0.003575	0.00359037
KP_PAES	1999	0.000582906	0.00214159	0.00141789	0.00140459
	2000	0.00123913	0.00309371	0.00204295	0.00187828
	2001	0.00134062	0.00329049	0.00240056	0.00258621
	2002	0.00798742	0.0285366	0.0213895	0.0250577
	2003	0.000350142	0.00114079	0.000716689	0.000669026
	99-04	0.00184325	0.0058298	0.00495994	0.00556382
KP_NSGA2	1999	7.41E-06	2.17E-05	1.10E-05	1.03E-05
	2000	8.92E-06	1.54E-05	1.120E-05	1.123E-05
	2001	1.30E-05	3.30E-05	2.27E-05	2.23E-05
	2002	7.70E-05	0.000108974	9.32E-05	9.00E-05
	2003	4.92E-06	3.69E-05	1.72E-05	1.40E-05
	99-04	1.73E-05	2.45E-05	2.03E-05	2.01E-05
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.98. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02_CC12.

IGD MV_F02_CC26					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.000767845	0.00119846	0.00104752	0.00108475
	2000	0.00123552	0.00183912	0.00153615	0.0015506
	2001	0.00255254	0.00288574	0.0027659	0.00281105
	2002	0.0228866	0.0255765	0.0244564	0.0244968
	2003	0.000953417	0.00108763	0.00101905	0.00101781
	99-04	0.00502648	0.0054611	0.00533268	0.00535326
KP_PAES	1999	NA	NA	NA	NA
	2000	NA	NA	NA	NA
	2001	NA	NA	NA	NA
	2002	NA	NA	NA	NA
	2003	NA	NA	NA	NA
	99-04	NA	NA	NA	NA
KP_NSGA2	1999	1.24E-05	0.000223632	8.69E-05	4.75E-05
	2000	1.09E-05	1.75E-05	1.41E-05	1.40E-05
	2001	1.38E-05	3.37E-05	2.01E-05	1.95E-05
	2002	8.09E-05	0.00012182	0.000100944	0.000100971
	2003	1.48E-05	3.81E-05	2.20E-05	2.12E-05
	99-04	1.71E-05	2.10E-05	1.90E-05	1.91E-05
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.99. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F02_CC26.

IGD MV_F03					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.00818607	0.00886543	0.00843451	0.00839734
	2000	0.0068155	0.00716628	0.00703495	0.00704326
	2001	0.00690989	0.00735289	0.00709393	0.00707449
	2002	0.0269882	0.0285599	0.027526	0.027431
	2003	0.00778578	0.00843742	0.00801698	0.00798314
	99-04	0.00679623	0.00723453	0.00693222	0.00690836
KP_PAES	1999	0.00963388	0.0120776	0.0105984	0.0105192
	2000	0.00733312	0.00980823	0.00882264	0.00877056
	2001	0.00786572	0.00997524	0.00864614	0.00864248
	2002	0.0278953	0.0296368	0.0289282	0.0290317
	2003	0.00904809	0.0116225	0.0102311	0.0101728
	99-04	0.00695703	0.00845386	0.00738755	0.00737243
KP_NSGA2	1999	0.00837943	0.00887445	0.00861787	0.00860253
	2000	0.00680742	0.00745643	0.00722024	0.00722551
	2001	0.00689036	0.00754006	0.00709914	0.00689036
	2002	0.0265661	0.0277444	0.0272611	0.0272729
	2003	0.00764783	0.00865777	0.00805035	0.00814839
	99-04	0.00670768	0.00690882	0.00683014	0.00683343
óptimo	1999			KP_mAG	KP_mAG
	2000			KP_mAG	KP_mAG
	2001			KP_mAG	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_mAG	KP_mAG
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.100. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03.

IGD MV_F03_CC4					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.0533073	0.0534833	0.0533419	0.0533215
	2000	0.0442033	0.0462644	0.0444082	0.0442268
	2001	0.0422957	0.0427111	0.0423386	0.0423104
	2002	0.0525494	0.0568215	0.0545748	0.0546374
	2003	0.051035	0.0532956	0.0512051	0.0510395
	99-04	0.0246181	0.025165	0.0248038	0.0248212
KP_PAES	1999	0.0711479	0.181961	0.106529	0.10449
	2000	0.0611745	0.164703	0.097246	0.0950696
	2001	0.0464015	0.169037	0.128863	0.151096
	2002	0.098696	0.192174	0.155589	0.166572
	2003	0.0783573	0.199611	0.116757	0.102398
	99-04	0.0385149	0.0867688	0.0691047	0.077991
KP_NSGA2	1999	0.0533178	0.0533291	0.0533212	0.053321
	2000	0.0442127	0.0442489	0.0442355	0.0442341
	2001	0.0423013	0.0423428	0.0423243	0.0423254
	2002	0.0524803	0.0547818	0.0529835	0.0528594
	2003	0.0510365	0.0510548	0.0510412	0.051039
	99-04	0.0246344	0.0249095	0.0247048	0.0246517
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_mAG
	2001			KP_NSGA2	KP_mAG
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.101. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03_CC4.

IGD MV_F03_CC8					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.0266733	0.0275089	0.0268116	0.0266944
	2000	0.0221253	0.0233742	0.0224029	0.0221706
	2001	0.0212614	0.0224694	0.0214703	0.0213115
	2002	0.0340757	0.0383865	0.0349827	0.0345085
	2003	0.0255305	0.0266061	0.025727	0.0255378
	99-04	0.013129	0.0140197	0.0133476	0.0132435
KP_PAES	1999	0.0334485	0.0545702	0.0440433	0.0419552
	2000	0.0297997	0.0629809	0.0438085	0.0455348
	2001	0.0263273	0.0544975	0.0383496	0.036231
	2002	0.0445017	0.0724196	0.0538752	0.0525456
	2003	0.039728	0.101568	0.0546615	0.0477678
	99-04	0.0176564	0.0604179	0.0253166	0.022762
KP_NSGA2	1999	0.0267003	0.0282945	0.0273928	0.0272613
	2000	0.0221785	0.0250833	0.0230705	0.0229735
	2001	0.021275	0.0221547	0.0216773	0.0216809
	2002	0.0335345	0.0359304	0.0345215	0.0344511
	2003	0.0255353	0.028441	0.0264122	0.0261427
	99-04	0.0131879	0.0140576	0.0135622	0.0136144
óptimo	1999			KP_mAG	KP_mAG
	2000			KP_mAG	KP_mAG
	2001			KP_mAG	KP_mAG
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_mAG	KP_mAG
	99-04			KP_mAG	KP_mAG

Tabla C.102. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03_CC8.

IGD MV_F03_CC12					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.0178245	0.0187857	0.018156	0.0180201
	2000	0.0148116	0.0159774	0.0150016	0.0148714
	2001	0.0143121	0.0150922	0.0145744	0.0145854
	2002	0.0290861	0.0309752	0.0299959	0.030068
	2003	0.0170346	0.0177945	0.0173196	0.0173049
	99-04	0.00971355	0.0099523	0.00981084	0.00980903
KP_PAES	1999	0.0236887	0.0395746	0.0299019	0.0292959
	2000	0.0176829	0.0307789	0.0258708	0.0258517
	2001	0.0188074	0.029807	0.0242473	0.0248845
	2002	0.0356179	0.0445105	0.0392325	0.0389057
	2003	0.0240306	0.0330851	0.0287665	0.0286056
	99-04	0.0129736	0.0186977	0.0151792	0.0151433
KP_NSGA2	1999	0.0181264	0.0208639	0.0190667	0.0188408
	2000	0.0150207	0.0173577	0.0161093	0.0160451
	2001	0.0146543	0.0165399	0.0154719	0.0154891
	2002	0.0298145	0.031987	0.0307417	0.0305386
	2003	0.0172356	0.0198904	0.0183964	0.0181772
	99-04	0.0098208	0.0114347	0.0105566	0.0105756
óptimo	1999			KP_mAG	KP_mAG
	2000			KP_mAG	KP_mAG
	2001			KP_mAG	KP_mAG
	2002			KP_mAG	KP_mAG
	2003			KP_mAG	KP_mAG
	99-04			KP_mAG	KP_mAG

Tabla C.103. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03_CC12.

IGD MV_F03_CC26					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.00835097	0.00882768	0.0085912	0.00857679
	2000	0.00705032	0.00729978	0.00709167	0.00706922
	2001	0.0071173	0.00742985	0.00721672	0.00719532
	2002	0.0266176	0.0275939	0.027157	0.0271979
	2003	0.00807056	0.00839638	0.00820994	0.00819063
	99-04	0.00681225	0.00689804	0.00684952	0.00684203
KP_PAES	1999	0.00965049	0.0128652	0.010805	0.0104982
	2000	0.00819233	0.0113026	0.00933102	0.0091057
	2001	0.00831563	0.00997159	0.00902153	0.00898151
	2002	0.0280583	0.0295343	0.0287765	0.0286991
	2003	0.00907912	0.0117369	0.0106216	0.0105021
	99-04	0.00727216	0.00803582	0.00752807	0.00754253
KP_NSGA2	1999	0.00860753	0.0091685	0.00885608	0.00885979
	2000	0.00725523	0.0077204	0.007498	0.007529
	2001	0.00726589	0.00771994	0.00750604	0.00750041
	2002	0.0267411	0.0277048	0.0273162	0.0273382
	2003	0.0081659	0.0086589	0.00841182	0.00841745
	99-04	0.00686086	0.00701864	0.00694008	0.0069446
óptimo	1999			KP_mAG	KP_mAG
	2000			KP_mAG	KP_mAG
	2001			KP_mAG	KP_mAG
	2002			KP_mAG	KP_mAG
	2003			KP_mAG	KP_mAG
	99-04			KP_mAG	KP_mAG

Tabla C.104. Métrica de distancia generacional invertida (IGD: Inverted Generational Distance). MV_F03_CC26.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F02					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0.0909091	0.0340909	0.0454545
	2000	0	0.03125	0.00625	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0.0384615	0.0230769	0.0384615
	2003	0	0.0833333	0.0354167	0.0416667
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0.0454545	0.0181818	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0.0769231	0.0384615	0.0384615
	2003	0	0.0833333	0.01875	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0.0909091	0.0613636	0.0454545
	2000	0	0.09375	0.05	0.046875
	2001	0	0.0571429	0.0171429	0.0142857
	2002	0.0384615	0.115385	0.0576923	0.0384615
	2003	0.125	0.25	0.1875	0.1875
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_mAG, KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	NA
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			NA	NA

Tabla C.105. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02.

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F02					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.18	0.365	0.256447	0.25
	2000	0.145	0.4	0.267628	0.265666
	2001	0.105	0.28	0.20925	0.2025
	2002	0.04	0.19	0.112541	0.11
	2003	0.14	0.545	0.369683	0.390799
	99-04	0.325	0.705	0.545	0.5325
KP_PAES	1999	0.07	0.43	0.24825	0.2275
	2000	0.07	0.34	0.19525	0.1825
	2001	0.119565	0.485	0.329228	0.35
	2002	0.005	0.115	0.048	0.0425
	2003	0.075	0.655	0.3525	0.375
	99-04	0.37	0.775	0.55	0.555
KP_NSGA2	1999	0.025	0.06	0.04575	0.045
	2000	0.035	0.09	0.05325	0.05
	2001	0.03	0.085	0.06	0.065
	2002	0.01	0.04	0.02225	0.0225
	2003	0.01	0.06	0.0365	0.04
	99-04	0.13	0.205	0.16875	0.1675
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.106. Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F02_CC4					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0.0454545	0.00227273	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0.0384615	0.00192308	0
	2003	0	0.0416667	0.00208333	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0.0384615	0.00576923	0
	2003	0	0.0416667	0.00208333	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0.0454545	0.136364	0.0704545	0.0454545
	2000	0	0.125	0.05	0.0625
	2001	0	0.0857143	0.0171429	0
	2002	0	0.0769231	0.0269231	0.0384615
	2003	0.0416667	0.166667	0.0833333	0.0833333
	99-04	0	0.0188679	0.00141509	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	NA
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	NA

Tabla C.107. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02_CC4.

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F02_CC4					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.395	1	0.792371	0.796596
	2000	0.37	1	0.730637	0.7025
	2001	0.37	1	0.839203	0.981132
	2002	0.0324324	0.813131	0.494848	0.528912
	2003	0.412162	1	0.907057	1
	99-04	0.64	1	0.924031	0.970805
KP_PAES	1999	0.6875	0.972973	0.803241	0.799059
	2000	0.436364	0.853659	0.638514	0.627632
	2001	0.421053	0.880952	0.693432	0.697769
	2002	0.255319	0.659091	0.435518	0.414583
	2003	0.263158	0.6875	0.436832	0.4
	99-04	0.5	0.962963	0.795949	0.805665
KP_NSGA2	1999	0.235	0.305	0.27275	0.275
	2000	0.045	0.09	0.06825	0.07
	2001	0.21	0.295	0.24875	0.2475
	2002	0	0.035	0.01175	0.01
	2003	0.485	0.545	0.5145	0.515
	99-04	0.075	0.17	0.123	0.1225
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_PAES	KP_PAES
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.108. Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02_CC4.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F02_CC8					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0.0384615	0.00961538	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0.0384615	0.00961538	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0.0454545	0.136364	0.0613636	0.0454545
	2000	0.03125	0.15625	0.0578125	0.0625
	2001	0	0.0571429	0.00857143	0
	2002	0	0.0769231	0.0326923	0.0384615
	2003	0	0.125	0.0708333	0.0625
	99-04	0	0.00943396	0.000471698	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	NA
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	NA

Tabla C.109. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02_CC8.

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F02_CC8					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.335	1	0.664776	0.602753
	2000	0.35	0.97	0.606157	0.594304
	2001	0.225	0.976744	0.558564	0.524516
	2002	0.04	0.835	0.419068	0.39095
	2003	0.782946	1	0.927281	0.956847
	99-04	0.604278	1	0.867467	0.880673
KP_PAES	1999	0.692308	1	0.906776	0.908333
	2000	0	1	0.838074	0.921212
	2001	0.666667	1	0.936146	1
	2002	0	0.777778	0.34301	0.341667
	2003	0.736842	1	0.941877	1
	99-04	0.842105	1	0.976106	1
KP_NSGA2	1999	0.04	0.085	0.06525	0.07
	2000	0.025	0.075	0.045	0.0425
	2001	0.04	0.095	0.06775	0.07
	2002	0	0.05	0.024	0.025
	2003	0.06	0.145	0.0955	0.09
	99-04	0.11	0.195	0.1565	0.16
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.110. Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02_CC8.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F02_CC12					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0.0384615	0.0115385	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0.0384615	0.0034965	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0.0909091	0.0522727	0.0454545
	2000	0	0.09375	0.0421875	0.03125
	2001	0	0.0285714	0.00571429	0
	2002	0	0.115385	0.0538462	0.0384615
	2003	0	0.208333	0.0791667	0.0833333
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	NA
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			NA	NA

Tabla C.111. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02_CC12.

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F02_CC12					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.211864	1	0.491165	0.424307
	2000	0.49	1	0.704548	0.638268
	2001	0.305	0.84	0.493806	0.482666
	2002	0.16	0.805	0.343478	0.27743
	2003	0.313725	0.991379	0.617734	0.608672
	99-04	0.56	0.979381	0.817421	0.867935
KP_PAES	1999	0.555556	1	0.926587	1
	2000	0	1	0.884615	1
	2001	0	1	0.872449	1
	2002	0	1	0.272727	0
	2003	0.75	1	0.972665	1
	99-04	0.5	1	0.970588	1
KP_NSGA2	1999	0.04	0.1	0.0725	0.0725
	2000	0.04	0.105	0.0645	0.0625
	2001	0.055	0.105	0.0795	0.08
	2002	0.005	0.045	0.02525	0.025
	2003	0.035	0.115	0.06125	0.06
	99-04	0.14	0.225	0.17975	0.1775
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_PAES
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.112. Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02_CC12.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F02_CC26					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0.0416667	0.00208333	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	NA	NA	NA	NA
	2000	NA	NA	NA	NA
	2001	NA	NA	NA	NA
	2002	NA	NA	NA	NA
	2003	NA	NA	NA	NA
	99-04	NA	NA	NA	NA
KP_NSGA2	1999	0	0.0454545	0.0181818	0
	2000	0	0.0625	0.028125	0.03125
	2001	0	0	0	0
	2002	0.0384615	0.0769231	0.0519231	0.0384615
	2003	0.0416667	0.166667	0.10625	0.125
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			KP_NSGA2	NA
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			NA	NA
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			NA	NA

Tabla C.113. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage). MV_F02_CC26.

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F02_CC26					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.715116	1	0.939232	1
	2000	1	1	1	1
	2001	0.544118	1	0.827484	0.834261
	2002	0.19898	0.538071	0.348708	0.328829
	2003	0.133929	0.535088	0.354616	0.338171
	99-04	0.665	0.91	0.810996	0.827299
KP_PAES	1999	NA	NA	NA	NA
	2000	NA	NA	NA	NA
	2001	NA	NA	NA	NA
	2002	NA	NA	NA	NA
	2003	NA	NA	NA	NA
	99-04	NA	NA	NA	NA
KP_NSGA2	1999	0.075	0.17	0.116	0.115
	2000	0.08	0.135	0.10225	0.1
	2001	0.17	0.315	0.22675	0.2325
	2002	0.015	0.07	0.046	0.0475
	2003	0.13	0.27	0.1845	0.185
	99-04	0.24	0.405	0.3155	0.3175
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.114. Métrica de cobertura de dos conjuntos (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F02_CC26.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F03					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F03			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
0.88	1	0.953489	0.952387
0.715	0.975	0.85425	0.8575
0.685	0.985	0.875351	0.881919
0.4	0.615	0.481	0.45
0.715	0.995	0.93575	0.9475
0.775	1	0.870724	0.8775
0.435	0.84	0.617	0.6125
0.48	0.915	0.75375	0.7575
0.255	0.925	0.542	0.555
0	0.22	0.05875	0.0525
0.305	0.935	0.655	0.6575
0.42	0.93	0.76325	0.8025
0.26	0.485	0.36225	0.365
0.37	0.455	0.41425	0.415
0.26	0.405	0.3625	0.3675
0.365	0.445	0.4005	0.4025
0.205	0.28	0.24125	0.24
0.55	0.645	0.59525	0.5975
	KP_NSGA2	KP_NSGA2	
	KP_NSGA2	KP_NSGA2	
	KP_NSGA2	KP_NSGA2	
	KP_PAES	KP_PAES	
	KP_NSGA2	KP_NSGA2	
	KP_NSGA2	KP_NSGA2	

Tabla C.115. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F03_CC4					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F03_CC4			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
0.683616	1	0.928969	0.9475
0.62	1	0.954537	1
0.53	1	0.958967	1
0.14	0.87	0.530719	0.6075
0.910615	1	0.986523	1
0.92	1	0.986319	1
0	0.5	0.248452	0.25
0	1	0.534722	0.625
0	1	0.916667	1
0	1	0.2	0
0	1	0.657692	0.8
1	1	1	1
0.105	0.185	0.14025	0.135
0.11	0.36	0.248	0.23
0.17	0.295	0.23275	0.23
0.1	0.23	0.16675	0.1675
0.145	0.215	0.1785	0.175
0.3	0.475	0.38875	0.385
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_PAES
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.116. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03_CC4.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F03_CC8					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F03_CC8			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
0.79558	1	0.972524	1
0.934343	1	0.994457	1
0.665	1	0.886638	0.896429
0	0.935	0.616148	0.7025
0.963855	1	0.997193	1
0.875	1	0.991	1
0.571429	0.944444	0.82041	0.84413
0.5	1	0.832368	0.840336
0.857143	1	0.982429	1
0.0833333	0.888889	0.344393	0.333333
0.777778	1	0.952361	1
0.8	1	0.971322	1
0.145	0.345	0.207	0.205
0.285	0.475	0.34525	0.3175
0.225	0.35	0.28375	0.28
0.255	0.385	0.3165	0.3125
0.16	0.28	0.2095	0.2075
0.465	0.58	0.52975	0.5325
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.117. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03_CC8.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F03_CC12					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F03_CC12			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
0.93	1	0.986744	1
0.995	1	0.99975	1
0.725	1	0.940983	0.952195
0.485	0.89	0.73425	0.78
0.865	1	0.979221	0.9925
0.935	1	0.979	0.9875
0.666667	1	0.931153	0.964815
0.9	1	0.983225	1
0.947368	1	0.992487	1
0.0952381	0.578947	0.30017	0.280788
0.869565	1	0.993478	1
0.969697	1	0.998485	1
0.19	0.365	0.2875	0.2925
0.33	0.45	0.39	0.395
0.26	0.38	0.331	0.335
0.31	0.425	0.3635	0.36
0.185	0.305	0.25075	0.2525
0.51	0.665	0.59925	0.6
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_PAES	KP_PAES
		KP_NSGA2	KP_NSGA2
		KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.118. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03_CC12.

TSC AFPV dominado por FPG. MV_F03_CC26					
(óptimo: mayor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_PAES	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
KP_NSGA2	1999	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0
	2001	0	0	0	0
	2002	0	0	0	0
	2003	0	0	0	0
	99-04	0	0	0	0
óptimo	1999			NA	NA
	2000			NA	NA
	2001			NA	NA
	2002			NA	NA
	2003			NA	NA
	99-04			NA	NA

ITSC FPG dominado por AFPV. MV_F03_CC26			
(óptimo: menor valor)			
min	max	media	mediana
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
0.55	0.845	0.687085	0.66
0	1	0.948996	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
0	1	0.6	1
1	1	1	1
1	1	1	1
0.34	0.525	0.445	0.4475
0.56	0.885	0.68425	0.6775
0.49	0.86	0.72025	0.73
0.43	0.53	0.479	0.48
0.33	0.515	0.42675	0.425
0.715	0.86	0.77225	0.765
KP_NSGA2		KP_NSGA2	
KP_NSGA2		KP_NSGA2	
KP_NSGA2		KP_NSGA2	
KP_NSGA2		KP_NSGA2	
KP_NSGA2		KP_NSGA2	
KP_NSGA2		KP_NSGA2	

Tabla C.119. Métrica de cobertura de dos conjuntos (TSC: Two Set Coverage) (ITSC: Inverted Two Set Coverage). MV_F03_CC26.

SS MV_F02					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	5.55E-05	8.16E-05	6.66E-05	6.65E-05
	2000	8.04E-05	0.000101893	9.32E-05	9.38E-05
	2001	7.46E-05	0.000165895	0.000103613	0.000100268
	2002	0.000490784	0.000845008	0.000730743	0.000744648
	2003	2.46E-05	0.000168418	4.31E-05	3.24E-05
	99-04	0.000260496	0.00037622	0.000308607	0.000304047
KP_PAES	1999	9.04E-05	0.00047442	0.00019484	0.000134663
	2000	0.000114152	0.000182189	0.000140208	0.000137571
	2001	0.000130493	0.000597745	0.000251267	0.00020913
	2002	0.000978862	0.00564621	0.00151588	0.00126957
	2003	4.10E-05	0.000331801	8.85E-05	7.40E-05
	99-04	0.000424227	0.00138895	0.000704402	0.00061255
KP_NSGA2	1999	3.77E-05	4.34E-05	4.08E-05	4.10E-05
	2000	4.74E-05	6.01E-05	5.35E-05	5.34E-05
	2001	5.54E-05	7.10E-05	6.41E-05	6.31E-05
	2002	0.000418625	0.000520983	0.000464253	0.000464038
	2003	1.99E-05	2.69E-05	2.35E-05	2.36E-05
	99-04	0.000159377	0.000213145	0.000193825	0.000196575
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.120. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02.

SS MV_F02_CC4					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	3.34E-05	0.000290367	9.84E-05	8.34E-05
	2000	5.98E-05	0.000524608	0.000168029	0.000142262
	2001	2.37E-05	0.000827378	0.000235987	0.000165247
	2002	0.000296615	0.00606825	0.00173837	0.00111502
	2003	4.23E-05	0.000368525	0.00011962	7.84E-05
	99-04	0.00014831	0.00229821	0.000661399	0.000509994
KP_PAES	1999	0.000274093	0.00112206	0.000623935	0.000596132
	2000	0.00020438	0.00123679	0.000722497	0.000654175
	2001	0.000259894	0.00145134	0.000780897	0.000815299
	2002	0.00215962	0.0076648	0.00484413	0.00463801
	2003	8.69E-05	0.00142816	0.000333795	0.00024186
	99-04	0.000555329	0.0045662	0.00227955	0.00217061
KP_NSGA2	1999	3.94E-05	5.18E-05	4.58E-05	4.57E-05
	2000	5.02E-05	6.50E-05	5.77E-05	5.82E-05
	2001	5.87E-05	7.13E-05	6.50E-05	6.52E-05
	2002	0.000417239	0.000521847	0.000456941	0.000446766
	2003	2.24E-05	6.60E-05	2.68E-05	2.49E-05
	99-04	0.000176114	0.000210095	0.000193196	0.000194978
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.121. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02_CC4.

SS MV_F02_CC8					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	4.36E-05	0.000120186	6.90E-05	5.91E-05
	2000	6.45E-05	0.000277851	0.000121488	0.000104925
	2001	2.92E-05	0.00101666	0.000183459	9.15E-05
	2002	0.000236086	0.00216645	0.000888747	0.000668461
	2003	1.64E-05	0.000134317	4.75E-05	3.98E-05
	99-04	3.60E-05	0.000925519	0.000380997	0.000350754
KP_PAES	1999	0.000162591	0.00806045	0.00138429	0.000831632
	2000	4.91E-18	0.00466917	0.00164267	0.00136925
	2001	7.29E-05	0.00415265	0.00159051	0.00109191
	2002	8.02E-05	0.0512253	0.0197455	0.0171083
	2003	1.65E-05	0.00122869	0.000411616	0.000302952
	99-04	5.16E-07	0.0347231	0.00992913	0.00670685
KP_NSGA2	1999	3.85E-05	4.72E-05	4.28E-05	4.27E-05
	2000	4.83E-05	6.56E-05	5.59E-05	5.58E-05
	2001	5.80E-05	7.34E-05	6.49E-05	6.48E-05
	2002	0.000406152	0.000514614	0.000453092	0.000448796
	2003	1.93E-05	2.84E-05	2.39E-05	2.42E-05
	99-04	0.000156952	0.000207323	0.000189932	0.000193708
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.122. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02_CC8.

SS MV_F02_CC12					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	2.20E-05	0.000193745	6.14E-05	4.57E-05
	2000	5.81E-05	0.000471496	0.000146849	0.000118323
	2001	3.16E-05	0.000827029	0.000144985	7.67E-05
	2002	0.000212227	0.00351255	0.00104893	0.000907678
	2003	1.26E-05	7.15E-05	3.82E-05	3.84E-05
	99-04	2.81E-05	0.00105307	0.000323599	0.000234582
KP_PAES	1999	0	0.00270819	0.000723531	0.000223727
	2000	0	0.00779481	0.00202043	0.000876896
	2001	0	0.00528011	0.0012473	0.00112987
	2002	0	0.0821246	0.0236066	0.0061508
	2003	0	0.0023256	0.000804317	0.000608962
	99-04	3.07E-19	0.0403198	0.00715476	0.000876278
KP_NSGA2	1999	3.61E-05	4.68E-05	4.09E-05	4.16E-05
	2000	4.98E-05	6.09E-05	5.52E-05	5.52E-05
	2001	5.42E-05	7.17E-05	6.33E-05	6.29E-05
	2002	0.000380694	0.000517658	0.000449364	0.000452405
	2003	1.97E-05	2.66E-05	2.32E-05	2.29E-05
	99-04	0.000161726	0.000210615	0.000181535	0.000179694
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.123. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02_CC12.

SS MV_F02_CC26					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	2.28E-05	0.000156164	5.34E-05	4.18E-05
	2000	3.74E-05	0.000313446	0.000106041	9.86E-05
	2001	1.46E-05	0.000152031	6.39E-05	6.01E-05
	2002	6.92E-05	0.000539692	0.000163194	0.00011959
	2003	9.70E-06	6.84E-05	2.44E-05	2.03E-05
	99-04	2.02E-05	0.000109978	4.48E-05	3.66E-05
KP_PAES	1999	NA	NA	NA	NA
	2000	NA	NA	NA	NA
	2001	NA	NA	NA	NA
	2002	NA	NA	NA	NA
	2003	NA	NA	NA	NA
	99-04	NA	NA	NA	NA
KP_NSGA2	1999	2.87E-05	0.000102597	4.33E-05	3.78E-05
	2000	4.75E-05	5.54E-05	5.11E-05	5.10E-05
	2001	5.45E-05	6.97E-05	6.30E-05	6.43E-05
	2002	0.000395089	0.00048359	0.000439628	0.000441657
	2003	1.90E-05	5.07E-05	2.43E-05	2.24E-05
	99-04	0.000159253	0.000207702	0.000179628	0.000180163
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_mAG
	2002			KP_mAG	KP_mAG
	2003			KP_NSGA2	KP_mAG
	99-04			KP_mAG	KP_mAG

Tabla C.124. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F02_CC26.

SS MV_F03					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.00244878	0.0551255	0.0210171	0.0175363
	2000	0.00279074	0.128359	0.0412369	0.0311819
	2001	0.0029905	0.184068	0.0464398	0.0389077
	2002	0.00101417	0.312915	0.0870051	0.0667151
	2003	0.00228636	0.113602	0.026531	0.0189024
	99-04	0.00793374	0.204744	0.084469	0.0742079
KP_PAES	1999	0.0014927	0.0791832	0.0321804	0.0292774
	2000	0.000972979	0.102616	0.0293186	0.0216141
	2001	0.00297763	0.046563	0.0194105	0.0167588
	2002	0.00244518	0.0349587	0.0152844	0.0131699
	2003	0.000294156	0.0302939	0.0134634	0.012549
	99-04	0.001154	0.0332291	0.0139827	0.0116287
KP_NSGA2	1999	0.00527007	0.121882	0.0575883	0.0570745
	2000	0.00312683	0.17776	0.0823002	0.0841256
	2001	0.0102644	0.13285	0.0702699	0.0722044
	2002	0.00239426	0.296047	0.101164	0.0753429
	2003	0.000254558	0.132475	0.0588086	0.0544352
	99-04	0.00131027	0.177863	0.0955472	0.11223
óptimo	1999			KP_mAG	KP_mAG
	2000			KP_PAES	KP_PAES
	2001			KP_PAES	KP_PAES
	2002			KP_PAES	KP_PAES
	2003			KP_PAES	KP_PAES
	99-04			KP_PAES	KP_PAES

Tabla C.125. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03.

SS MV_F03_CC4					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.00120986	0.198556	0.128006	0.153894
	2000	0.0781431	0.21197	0.148992	0.141114
	2001	0.00260569	0.224563	0.141751	0.155445
	2002	0.00585781	0.342735	0.0947648	0.0926434
	2003	0.0307733	0.290194	0.155007	0.167628
	99-04	0.0193083	0.238677	0.124178	0.134419
KP_PAES	1999	0.0282588	0.443606	0.241963	0.206773
	2000	0.114557	0.369103	0.26858	0.304299
	2001	NA	NA	NA	NA
	2002	NA	NA	NA	NA
	2003	0.00214041	0.431219	0.188168	0.163995
	99-04	NA	NA	NA	NA
KP_NSGA2	1999	0.0205372	0.153727	0.083378	0.0754235
	2000	0.0152537	0.22947	0.082626	0.0667247
	2001	0.000295571	0.200193	0.0793473	0.0817709
	2002	0.00162988	0.276433	0.126761	0.137999
	2003	0.0157409	0.231858	0.0753918	0.0476159
	99-04	0.00965625	0.217994	0.0740564	0.0633076
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_mAG	KP_mAG
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_NSGA2	KP_NSGA2

Tabla C.126. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03_CC4.

SS MV_F03_CC8					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.0259982	0.124126	0.072922	0.0782578
	2000	0.00869105	0.122646	0.0662393	0.0671301
	2001	0.0154708	0.103474	0.0744935	0.0838996
	2002	0.00765302	0.282767	0.0810062	0.0644447
	2003	0.0134343	0.110665	0.0753904	0.0830235
	99-04	0.00128906	0.124518	0.0695196	0.0711345
KP_PAES	1999	0.0282008	0.385528	0.181494	0.186314
	2000	0.00379433	0.342945	0.197918	0.238134
	2001	0.0294729	0.405572	0.181157	0.187115
	2002	0.0135277	0.334514	0.120395	0.103199
	2003	0.00257882	0.478751	0.18628	0.154434
	99-04	0.0176126	0.368131	0.117057	0.0793621
KP_NSGA2	1999	0.00118158	0.139837	0.0517777	0.0485878
	2000	0.00160443	0.162583	0.0630062	0.0550617
	2001	0.00300591	0.142237	0.0640087	0.0602154
	2002	0.00189575	0.358397	0.139671	0.104744
	2003	0.00199616	0.19367	0.0497285	0.0408559
	99-04	0.0014432	0.208652	0.0942009	0.0828033
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2001			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2002			KP_mAG	KP_mAG
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_mAG	KP_mAG

Tabla C.127. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03_CC8.

SS MV_F03_CC12					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.0309508	0.0896274	0.0545169	0.0547632
	2000	0.00907416	0.0699797	0.0482031	0.0530064
	2001	0.033143	0.0736711	0.0519796	0.0535104
	2002	0.000333542	0.150959	0.0382485	0.0364657
	2003	0.0161655	0.073183	0.0521096	0.0553819
	99-04	0.00224874	0.0737376	0.0445126	0.0432413
KP_PAES	1999	0.0718215	0.316492	0.175867	0.159157
	2000	0.0112875	0.377162	0.166732	0.14145
	2001	0.0186528	0.130697	0.0810981	0.09385
	2002	0.0173885	0.187745	0.0925671	0.0884937
	2003	0.02237	0.162485	0.103117	0.109341
	99-04	0.0261078	0.19002	0.0867437	0.0775696
KP_NSGA2	1999	0.00634063	0.155335	0.0442287	0.035011
	2000	0.00117875	0.152538	0.050345	0.0347433
	2001	0.00686318	0.160077	0.0804249	0.0831791
	2002	0.00807799	0.269029	0.115824	0.0892758
	2003	0.00702157	0.0899419	0.0311583	0.0296995
	99-04	0.00739209	0.222673	0.114366	0.114191
óptimo	1999			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	2000			KP_mAG	KP_NSGA2
	2001			KP_mAG	KP_mAG
	2002			KP_mAG	KP_mAG
	2003			KP_NSGA2	KP_NSGA2
	99-04			KP_mAG	KP_mAG

Tabla C.128. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03_CC12.

SS MV_F03_CC26					
(óptimo: menor valor)					
		min	max	media	mediana
KP_mAG	1999	0.00639451	0.0248826	0.0156282	0.0152051
	2000	0.00221169	0.0355982	0.0166062	0.0160623
	2001	0.00795672	0.0244614	0.0181884	0.0184107
	2002	0.000125087	0.0262315	0.0113462	0.00983543
	2003	0.0237542	0.0334072	0.0267352	0.0262701
	99-04	0.0152337	0.0386376	0.0222498	0.020921
KP_PAES	1999	NA	NA	NA	NA
	2000	0.029014	0.029014	0.029014	0.029014
	2001	NA	NA	NA	NA
	2002	NA	NA	NA	NA
	2003	NA	NA	NA	NA
	99-04	NA	NA	NA	NA
KP_NSGA2	1999	0.00160725	0.0808393	0.0409417	0.0391072
	2000	0.00157968	0.110329	0.0618792	0.0682552
	2001	0.00146654	0.136732	0.045675	0.0355551
	2002	0.00191767	0.31691	0.124707	0.0963924
	2003	0.000973686	0.13054	0.0474068	0.0457134
	99-04	0.000281428	0.305744	0.112554	0.0819049
óptimo	1999			KP_mAG	KP_mAG
	2000			KP_mAG	KP_mAG
	2001			KP_mAG	KP_mAG
	2002			KP_mAG	KP_mAG
	2003			KP_mAG	KP_mAG
	99-04			KP_mAG	KP_mAG

Tabla C.129. Métrica del espacio distribuido de Schott (SS: Spread Schott). MV_F03_CC26.

PaCo MV_F02				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	54	849	106	17
BMV2000	125	991	94	25
BMV2001	63	795	177	28
BMV2002	401	1643	617	23
BMV2003	35	822	5	10
BMV99-04	128	1202	328	106

Tabla C.130. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02.

PaCo MV_F02				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	5.26	82.75	10.33	17
BMV2000	10.12	80.24	7.61	2.02
BMV2001	5.93	74.79	16.65	2.63
BMV2002	14.94	61.21	22.99	0.86
BMV2003	4.01	94.27	0.57	1.15
BMV99-04	7.26	68.14	18.59	6.01

Tabla C.131. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02.

PaCo MV_F02_CC4				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	777	35	16
BMV2000	12	1248	11	24
BMV2001	6	803	32	29
BMV2002	50	2401	88	22
BMV2003	1	440	9	15
BMV99-04	27	1597	37	102

Tabla C.132. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC4.

PaCo MV_F02_CC4				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	93.84	4.23	1.93
BMV2000	0.93	96.37	0.85	1.85
BMV2001	0.69	92.3	3.68	3.33
BMV2002	1.95	93.75	3.44	0.86
BMV2003	0.22	94.62	1.94	3.23
BMV99-04	1.53	90.58	2.1	5.79

Tabla C.133. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC4.

PaCo MV_F02_CC8				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	847	5	16
BMV2000	1	1111	10	25
BMV2001	0	909	5	30
BMV2002	6	1970	129	23
BMV2003	0	724	0	15
BMV99-04	0	1429	71	105

Tabla C.134. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC8.

PaCo MV_F02_CC8				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	97.58	0.58	1.84
BMV2000	0.09	96.86	0.87	2.18
BMV2001	0	96.29	0.53	3.18
BMV2002	0.28	92.58	6.06	1.08
BMV2003	0	97.97	0	2.03
BMV99-04	0	89.03	4.42	6.54

Tabla C.135. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC8.

PaCo MV_F02_CC12				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	868	5	17
BMV2000	0	1050	6	23
BMV2001	0	896	31	32
BMV2002	0	1800	14	22
BMV2003	0	785	0	15
BMV99-04	0	1355	73	106

Tabla C.136. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC12.

PaCo MV_F02_CC12				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	97.53	0.56	1.91
BMV2000	0	97.31	0.56	2.13
BMV2001	0	93.43	3.23	3.34
BMV2002	0	98.04	0.76	1.2
BMV2003	0	98.12	0	1.88
BMV99-04	0	88.33	4.76	6.91

Tabla C.137. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC12.

PaCo MV_F02_CC26				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	802	0	20
BMV2000	0	945	0	28
BMV2001	0	809	0	35
BMV2002	0	1524	0	23
BMV2003	0	625	0	19
BMV99-04	0	1006	5	106

Tabla C.138. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC26.

PaCo MV_F02_CC26				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	97.57	0	2.43
BMV2000	0	97.12	0	2.88
BMV2001	0	95.85	0	4.15
BMV2002	0	98.51	0	1.49
BMV2003	0	97.05	0	2.95
BMV99-04	0	90.06	0.45	9.49

Tabla C.139. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F02_CC26.

PaCo MV_F03				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	72	738	97	22
BMV2000	101	655	174	32
BMV2001	398	554	156	35
BMV2002	456	1232	1001	26
BMV2003	134	675	94	24
BMV99-04	169	850	333	106

Tabla C.140. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03.

PaCo MV_F03				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	7.75	79.44	10.44	2.37
BMV2000	10.5	68.09	18.09	3.33
BMV2001	34.82	48.47	13.65	3.06
BMV2002	16.8	45.38	36.87	0.96
BMV2003	14.46	72.82	10.14	2.59
BMV99-04	11.59	58.3	22.84	7.27

Tabla C.141. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03.

PaCo MV_F03_CC4				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	3	435	26	22
BMV2000	0	934	19	32
BMV2001	0	644	56	35
BMV2002	0	2298	294	26
BMV2003	0	638	1	24
BMV99-04	0	1537	14	106

Tabla C.142. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC4.

PaCo MV_F03_CC4				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0.62	89.51	5.35	4.53
BMV2000	0	94.82	1.93	3.25
BMV2001	0	87.62	7.62	4.76
BMV2002	0	87.78	11.23	0.99
BMV2003	0	96.23	0.15	3.62
BMV99-04	0	92.76	0.84	6.4

Tabla C.143. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC4.

PaCo MV_F03_CC8				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	2	518	44	22
BMV2000	0	892	6	32
BMV2001	0	668	177	35
BMV2002	15	1633	546	26
BMV2003	2	721	4	24
BMV99-04	2	1152	29	106

Tabla C.144. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC8.

PaCo MV_F03_CC8				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0.34	88.4	7.51	3.75
BMV2000	0	95.91	0.65	3.44
BMV2001	0	75.91	20.11	3.98
BMV2002	0.68	73.56	24.59	1.17
BMV2003	0.27	96.01	0.53	3.2
BMV99-04	0.16	89.37	2.25	8.22

Tabla C.145. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC8.

PaCo MV_F03_CC12				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	631	30	22
BMV2000	1	778	1	32
BMV2001	0	664	111	35
BMV2002	72	1489	395	26
BMV2003	0	677	39	24
BMV99-04	1	878	57	106

Tabla C.146. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC12.

PaCo MV_F03_CC12				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	92.39	4.39	3.22
BMV2000	0.12	95.81	0.12	3.94
BMV2001	0	81.98	13.7	4.32
BMV2002	3.63	75.13	19.93	1.31
BMV2003	0	91.49	5.27	3.24
BMV99-04	0.1	84.26	5.47	10.17

Tabla C.147. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC12.

PaCo MV_F03_CC26				
contribución en puntos al FP conjunto (#)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	725	0	22
BMV2000	0	474	0	32
BMV2001	0	639	0	35
BMV2002	0	1100	359	26
BMV2003	0	651	0	24
BMV99-04	0	453	0	106

Tabla C.148. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC26.

PaCo MV_F03_CC26				
porcentaje de contribución (%)				
(óptimo: mayor valor)				
	KP_PAES	KP_NSGA2	KP_mAG	SOLVER
BMV1999	0	97.05	0	2.95
BMV2000	0	93.68	0	6.32
BMV2001	0	94.81	0	5.19
BMV2002	0	74.07	24.18	1.75
BMV2003	0	96.44	0	3.56
BMV99-04	0	81.04	0	18.96

Tabla C.149. Métrica de contribución al frente (PaCo: Pareto contribution). MV_F03_CC26.