Conceptos de Optimización Multiobjetivo para el Manejo de Restricciones en Algoritmos Evolutivos: Un Estudio Comparativo

Efrén Mezura-Montes y Carlos A. Coello Coello

CINVESTAV-IPN
Grupo de Computación Evolutiva
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Sección de Computación
Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508
Col. San Pedro Zacatenco
México D.F. 07300, MÉXICO
emezura@computacion.cs.cinvestav.mx
ccoello@cs.cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se discuten los conceptos propios de la optimización evolutiva multiobjetivo incorporados a técnicas para manejo de restricciones en algoritmos evolutivos. Se incluye una breve descripción general de los métodos reportados en la literatura que utilizan estos conceptos. Además, se muestran los resultados de un estudio comparativo con 4 de las técnicas más representativas, analizándose el desempeño de cada una de ellas.

1 Introducción

Los Algoritmos Evolutivos (AEs) son heurísticas que se han aplicado con gran éxito en distintas áreas [7, 17, 9] , para problemas con uno o múltiples objetivos. Sin embargo, estas técnicas carecen de un mecanismo para guiar la búsqueda en espacios restringidos. De ahí que hayan surgido una gran cantidad de propuestas para incorporar las restricciones en la función de aptitud de un algoritmo evolutivo [3, 18].

El enfoque más socorrido en la literatura es el uso de funciones de penalización [24, 3]. Sin embargo, a pesar de su sencillez las funciones de penalización tienen una gran desventaja: requieren de la definición por parte del usuario de factores de penalización. Entre las propuestas alternativas para el manejo de restricciones en algoritmos evolutivos existe un conjunto de técnicas donde las restricciones son manejadas también como objetivos (un problema mono-objetivo con restricciones se transforma en un problema multiobjetivo sin restricciones). Este trabajo se centra en este tipo de técnicas.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se establece el problema de nuestro interés y se describen y comentan las técnicas más populares para manejo de restricciones basadas en conceptos multiobjetivo. La Sección 3 presenta un estudio comparativo de cuatro de las técnicas discutidas previamente. En dicho estudio, se utilizan problemas tomados del conjunto de funciones de prueba tradicionalmente utilizado en la literatura de técnicas de manejo de restricciones [18, 5]. En la Sección 4 se discuten los resultados obtenidos y, por último, en la Sección 5 se establecen las conclusiones y el trabajo futuro.

2 Técnicas para Manejo de Restricciones Basadas en Conceptos de Optimización Multiobjetivo

Nuestro interés es el encontrar el vector $\vec{x}$ que optimice $f(\vec{x})$ sujeta a: $g_i(\vec{x}), \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, n$; $h_j(\vec{x}) = 0, \;\; j = 1, \ldots, p$ donde $\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_r]^T$ son las variables de decisión, n es el número de restricciones de desigualdad y p es el número de restricciones de igualdad del problema (en ambos casos, las restricciones pueden ser lineales o no lineales). Para utilizar una técnica multiobjetivo para manejar restricciones se debe redefinir el problema mono-objetivo como uno multiobjetivo en el cual se tendrán $m + 1$ objetivos, donde m es el número total de restricciones del problema y el objetivo adicional es la función objetivo original. De esta manera se puede aplicar una técnica multiobjetivo [7] al nuevo vector $\bar{v} = (f(\vec{x}), f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$, donde $f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})$ son las restricciones originales del problema. Una solución ideal $\vec{x}$ sería $f_i(\vec{x})$=0 para $1 \leq i \leq m$ y $f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$ para todos los vectores factibles $\vec{y}$ (asumiendo minimización).

Existen principalmente tres mecanismos tomados de la optimización evolutiva multiobjetivo que se utilizan para manejar restricciones: (1) Uso de la dominancia de Pareto como un criterio de seleccción, (2) uso de la jerarquización de Pareto [10] para asignar una aptitud a los individuos y (3) dividir a la población en subpoblaciones que serán evaluadas cada una con respecto a una restricción del problema o a la función objetivo original. Este último es el mecanismo de selección utilizado por el "Vector Evaluated Genetic Algorithm" (VEGA) [23].

Una técnica multiobjetivo está diseñada para encontrar un conjunto de soluciones compromiso que son igualmente buenas entre sí. Por otro lado, en optimización global se busca la solución óptima. Por ello, la técnica debe ser modificada. Los criterios que surgen son: la superioridad de una solución factible sobre una no factible, el número de restricciones violadas y la cantidad de violación de una solución.

A continuación se describen las distintas propuestas que utilizan los conceptos antes mencionados. Una descripción y análisis más profundo y el detalle algorítmico de cada una de las técnicas descritas en este trabajo se encuentran en [16].

Entre los enfoques encontrados en la literatura están el Pareto Set and Line Search de Camponogara y Talukdar [1] que transforma un problema mono-objetivo en uno bi-objectivo, donde el primer objetivo es optimizar la función objetivo original y el segundo es minimizar la cantidad total de violación. Un enfoque min-max similar al utilizado en optimización multiobjetivo [2], adoptando tres criterios de selección fue propuesto por Jiménez and Verdegay [14]. Ray et al. [20] propusieron el uso de jerarquización de Pareto en tres espacios distintos (objetivo, restricciones y la combinación de ambos). Además utiliza restricciones a la cruza y nichos para mantener diversidad en la población. Jiménez et al. [13] propusieron un algoritmo que utiliza dominancia de Pareto dentro de un esquema de preselección para resolver problemas de optimización multiobjetivo, satisfacción de restricciones, optimización global y programación por metas. Ray [19] propuso una extensión a su trabajo anterior [20] donde enfatiza la no sensibilidad de la mejor solución encontrada a cambios o variaciones a la definición del problema. COMOGA, propuesta por Surry & Radcliffe [25] utiliza una combinación de un enfoque poblacional multiobjetivo como lo es VEGA [23] con jerarquización de Pareto para el manejo de restricciones. Fue utilizado para resolver un problema de diseño de una red de gas y mostró un mejor desempeño que una función de penalización. Su principal desventaja es que requiere de parámetros extra definidos por el usuario. Coello [6] utilizó un mecanismo poblacional similar a VEGA [23] para manejar restricciones. La población general se divide en $m+1$ subpoblaciones, donde m es el número de restricciones del problema. Así, cada subpoblación se encargará de satisfacer una de las restricciones del problema y la subpoblación restante se ocupará de optimizar la función objetivo. Todas las soluciones se combinan utilizando operadores genéticos. Su principal desventaja es su sensibiliadad al número de restricciones del problema, que incrementa el número de subpoblaciones. Coello [5] utiliza jerarquización de Pareto como criterio de selección similar a la utilizada en MOGA de Fonseca y Fleming [8] para optimización multiobjetivo, donde los individuos factibles obtienen un valor de jerarqía mayor a aquellos no factibles. Esta propuesta obtiene buenos resultados con un número moderado de evaluaciones de la función objetivo. Sin embargo su costo computacional es del orden de $O(KM^2)$ (donde M es el tamaño de la población y K es el número de restricciones más uno) debido al proceso de jerarquización. Coello y Mezura [4] implementaron una versión del Niched-Pareto Genetic Algorithm (NPGA) [12] para el manejo de restricciones. En este caso, se utiliza una selección mediante torneo basado en no-dominancia. Esta nueva propuesta no requiere el uso de nichos para mantener diversidad. En su lugar se utiliza un parámetro llamado S_r que controla la diversidad en la población. Este parámetro permite que algunos individuos sean seleccionados de manera puramente aleatoria, sin importar que sean no factibles o con un valor bajo de aptitud. Esto permite muestrear de mejor manera la zona factible del espacio de búsqueda. Esta propuesta ha producido resultados competitivos, pero ha demostrado ser sensible a la dimensionalidad del problema.

3 Estudio Comparativo

Se implementaron cuatro técnicas: COMOGA [25], el uso de VEGA propuesta por Coello [6], NPGA para manejo de restricciones [4] y aquella que utiliza MOGA [5]. Para evitar confusiones con la notación, las últimas tres técnicas se renombrarán como: HCVEGA, HCNPGA y HCMOGA, respectivamente. Para evaluar el desempeño de estos enfoques se utilizó el benchmark tradicionalmente adoptado en la literatura y

Problema	**n**	**Tipo de función**	ρ	**LI**	**NI**	**LE**	**NE**
1	13	quadratic	0.0003%	9	0	0	0
2	20	non linear	99.9973%	2	0	0	0
3	10	non linear	0.0026%	0	0	0	1
4	5	quadratic	27.0079%	4	2	0	0
5	4	non linear	0.0000%	2	0	0	3
6	2	non linear	0.0057%	0	2	0	0
7	10	quadratic	0.0000%	3	5	0	0
8	2	non linear	0.8581%	0	2	0	0
9	7	non linear	0.5199%	0	4	0	0
10	8	linear	0.0020%	6	0	0	0
11	2	quadratic	0.0973%	0	0	0	1
12	3	quadratic	4.7697%	0	9^3	0	0
13	5	non linear	0.0000%	0	0	1	2

Tabla 1: Valores de ρ para los 13 problemas seleccionados.

P	**COMOGA**						
	Óptimo	**Mejor**	**Mediana**	**Media**	**Dev. Est.**	**Peor**	F_p
1	-15	-5.000	0.000	-0.673	1.353	0.0	0.0012
2	0.803619	0.027	0.021	0.020	0.003	0.008	0.9986
3	1	0.125	0.000	-1399999.995	3469870.316	$-$	0.0002
4	-30665.539	-30533.056	-30328.199	-30329.563	74.793	-30141.033	0.0023
5	5126.4981	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
6	-6961.813	-6808.695	-5408.742	-5255.104	994.761	-1341.317	0.0020
7	24.306	485.579	1987.980	1567.294	924.459	3149.045	0.0003
8	0.095825	0.095	0.094	0.094	0.001	0.089	0.0028
9	680.63	733.001	979.748	983.625	115.570	1314.535	0.0112
10	7049.33	10865.433	18994.846	18924.576	3851.982	26625.984	0.00
11	0.75	0.749	0.749	0.749	0.000	0.751	0.0002
12	1	0.999	0.999	0.999	0.000	0.993	0.0702
13	0.0539498	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Tabla 2: Resultados obtenidos con COMOGA en los 13 problemas de prueba. El símbolo “-” significa que no fueron encontradas soluciones factibles durante los experimentos.

propuesto en [18]. Para medir la dificultad de cada problema se utilizó la métrica ρ (sugerida por Koziel y Michalewicz [15]) calculando la siguiente expresión.

$$\rho = |F|/|S| \tag{1}$$

donde $|F|$ es el número de soluciones factibles y $|S|$ es el número total de soluciones generadas de manera aleatoria. En este estudio se usó un valor de $S = 1,000,000$.
Los distintos valores de ρ para cada una de las funciones se muestran en la Tabla 1, donde n es el número de variables de decisión, LI es el número de desigualdades lineales, NI es el número de desigualdades no lineales, LE es el número de igualdades lineales y NE es el número de igualdades no lineales. Es claro ver que los problemas 5 y 13 son los más difíciles de resolver puesto que presentan los valores más bajos de ρ.

Para las 4 técnicas se utilizó un algoritmo genético con representación binaria con código Gray, cruza de dos puntos y mutación uniforme. Las restricciones de igualdad

P	HCVEGA						
	Óptimo	**Mejor**	**Mediana**	**Media**	**Dev. Est.**	**Peor**	F_p
1	-15	-11.221	-9.702	-9.715	0.493	-8.387	0.1461
2	0.803619	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.9999
3	1	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.0022
4	-30665.539	-30647.246	-30628.587	-30628.468	7.877	-30607.240	0.4081
5	5126.4981	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
6	-6961.813	-6942.747	-6758.276	-6762.048	101.608	-6516.471	0.0427
7	24.306	28.491	34.527	34.558	2.931	41.785	0.1535
8	0.095825	0.095826	0.095826	0.095826	0.000	0.095826	0.3933
9	680.63	693.642	736.190	739.306	25.164	806.855	0.0461
10	7049.33	9842.453	17708.879	17605.587	3877.896	27627.634	0.0000
11	0.75	0.749	0.812	0.798	0.025	0.847	0.0112
12	1	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	0.5165
13	0.0539498	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Tabla 3: Resultados obtenidos con HCVEGA en los 13 problemas de prueba. El símbolo “-” significa que no fueron encontradas soluciones factibles durante los experimentos.

($h_j(\vec{x}) = 0$) se transformaron en restricciones de desigualdad agregando una tolerancia ϵ (para estos experimentos $\epsilon = 0.001$) de manera que: $|h_j(\vec{x})| - \epsilon \leq 0$ El número de evaluaciones de la función de aptitud fue el mismo para las 4 propuestas ($80,000$). Los parámetros propios de cada una de ellas son los siguientes:

COMOGA: Tamaño de población = 200, porcentaje de cruza = 1.0 porcentaje de mutación = 0.05, proporción de soluciones factibles = 10 %, $\epsilon = 0.01$.

HCVEGA: Tamaño de población = 200, Num. de generaciones = 400, porcentaje de cruza = 0.6, porcentaje de mutación = 0.05, Tam. del torneo= 5.

HCNPGA: Tamaño de población = 200, Num. de generaciones = 400, porcentaje de cruza = 0.6 porcentaje de mutación = 0.05, tamaño de la muestra de la población = 10, tasa de selección= 0.8.

HCMOGA: Tamaño de población = 200, Num. de generaciones = 400, porcentaje de cruza = 0.6, porcentaje de mutación = 0.05.

Se realizaron 100 corridas por cada técnica y por cada problema. Los resultados estadísticos se presentan en las Tablas 2, 3, 4 y 5, donde P_i se refiere al problema resuelto ($1 \leq i \leq 13$). $0.0 \leq F_p \leq 1.0$ es el porcentaje promedio de soluciones factibles encontradas en una corrida sencilla (con respecto a la población total). Las 4 técnicas encontraron soluciones factibles en todas las corridas con las siguientes excepciones: COMOGA sólo encontró soluciones factibles en 8 de 100 corridas para P07, 99 de 100 para P08 y 71 de 100 para P10. HCVEGA encontró soluciones factibles en 63 de 100 corridas para P10. HCNPGA encontró soluciones factibles en 52 de 100 corridas para P01 y en 29 de 100 para P10. HCMOGA encontró soluciones factibles en todos los problemas para todas las corridas . Donde las técnicas no encontraron soluciones factibles en ninguna corrida (P5 y P13) está indicado con un “-” en las Tablas de resultados.

4 Discusión de Resultados

Después de analizar los resultados se presentan los siguientes comentarios:

P	HCNPGA						
	Óptimo	Mejor	Mediana	Media	Dev. Est.	Peor	F_p
1	-15	-10.565	-6.460	-6.496	2.184	-1.275	0.0000
2	0.803619	0.785	0.731	0.724	0.034	0.528	0.9148
3	1	0.974	0.866	0.861	0.053	0.715	0.0023
4	-30665.539	-30661.033	-30635.346	-30630.883	20.466	-30544.324	0.3454
5	5126.4981	–	–	–	–	–	–
6	-6961.813	-6941.307	-6748.525	-6644.539	336.222	-5164.000	0.0175
7	24.306	26.985	30.882	31.248	2.324	38.459	0.0492
8	0.095825	0.095826	0.095826	0.095826	0.000	0.095826	0.4247
9	680.63	680.951	682.121	682.335	0.836	684.816	0.2402
10	7049.33	8183.303	12691.962	13716.703	4804.769	23585.121	0.0004
11	0.75	0.749	0.749	0.753	0.012	0.832	0.0258
12	1	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	0.4462
13	0.0539498	–	–	–	–	–	–

Tabla 4: Resultados obtenidos con HCNPGA en los 13 problemas de prueba. El símbolo “-” significa que no fueron encontradas soluciones factibles durante los experimentos.

Calidad de los resultados: Tanto HCVEGA, HCNPGA y HCMOGA alcanzaron el óptimo global en 3 funciones de prueba (P08, P11 y P12). COMOGA sólo lo logró en P11. HCNPGA obtuvo mejores resultados en 5 problemas (P2, P3, P4, P7 y P9), HCMOGA obtuvo mejores resultados en 3 problemas (P1, P5 y P10), HCVEGA fue mejor sólo en P6. COMOGA no fue superior en ninguno de los problemas propuestos.

Consistencia: HCVEGA presentó las menores desviaciones estándar en 4 problemas (P1, P2, P3 y P4), HCMOGA en 3 (P6,P10 y P11) y HCNPGA en 2 (P7 y P9). Sin embargo los mejores valores de media y mediana fueron para HCNPGA en 5 problemas (P2, P3, P4, P7 y P9), para HCMOGA en 4 (P1, P5, P10 y P11) y para HCVEGA sólo en P6. Hubo empates en P8 y P12. Esto indica que HCVEGA presentó convergencia prematura.

Diversidad: Un comportamiento utópico de la diversidad de la población para un problema con restricciones sería tener la mitad de la misma con soluciones factibles y la otra mitad con individuos no factibles. Sin embargo, en la realidad ese balance es muy difícil de obtener. Bajo esta idea, las técnicas más balanceadas (más cercanas al 50 % de soluciones factibles) fueron HCNPGA (P2, P8, P9 y P11)) y HCVEGA (P1, P4, P6 y P7) . En segundo lugar apareció HCMOGA (P3, P10 y P12).

Dificultad de los problemas de prueba: Con base en los resultados obtenidos se realizó una clasificación de las funciones de prueba en 3 categorías: Muy difícil (P_5, P_{13}), difícil (P_1, P_2, P_3, P_{10}), promedio (P_4, P_6, P_7, P_9) y fácil (P_8, P_{11}, P_{12}).

Comentarios finales: Después de analizar los resultados, se puede comentar lo siguiente: Las cuatro técnicas mostraron dificultades al trabajar con zonas factibles grandes; es decir, tienen problemas para alcanzar el óptimo global una vez que se alcanza la zona factible del espacio de búsqueda (por ejemplo P_2 donde la zona factible es un 99% del espacio de búsqueda). Cuando el problema a resolver tiene más de una restricción de igualdad (P_5 y P_{13}), el problema se vuelve muy difícil de resolver para estas propuestas comparadas. Estas técnicas son sensibles a la alta dimensionalidad de un problema (P_1 con 13 variables de decisión, P_2 con 20, P_3 con 10 y P_{10} con 8). Las cuatro técnicas son eficientes al encontrar zonas factibles pequeñas (juntas, disjuntas, no convexas) conformadas por un número significativo de restricciones de desigualdad (tanto lineales como no lineales). En problemas con baja dimensionali-

P	HCMOGA						
	Óptimo	Mejor	Mediana	Media	Dev. Est.	Peor	F_p
1	-15	-13.967	-12.900	-12.752	0.815	-9.328	0.0137
2	0.803619	-0.425	-0.512	-0.515	0.040	-0.618	0.9988
3	1	-0.035	-0.219	-0.246	0.143	-0.601	0.0097
4	-30665.539	-30649.958	-30570.754	-30568.917	53.531	-30414.773	0.3448
5	5126.4981	8879.123	8879.977	8879.944	0.100	8879.999	0.0000
6	-6961.813	-6939.439	-6699.261	-6678.926	156.695	-6258.591	0.0170
7	24.306	29.572	40.376	45.589	15.171	114.547	0.0132
8	0.095825	0.095825	0.095825	0.095825	0.000	0.095825	0.0743
9	680.63	681.707	689.955	692.966	10.957	734.002	0.0485
10	7049.33	7578.336	9026.873	9504.358	1506.820	16473.984	0.0114
11	0.75	0.749	0.749	0.749	0.000	0.752	0.0169
12	1	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	0.0900
13	0.0539498	–	–	–	–	–	–

Tabla 5: Resultados obtenidos con HCMOGA en los 13 problemas de prueba. El símbolo “-” significa que no fueron encontradas soluciones factibles durante los experimentos.

dad (2 ó 3 variables de decisión) y restricciones de cualquier tipo, las cuatro técnicas produjeron buenos resultados (P_8, P_{11}, and P_{12}). HCMOGA fue el único método en encontrar soluciones factibles en un problema clasificado como muy difícil y otro catalogado como difícil (P_5 y P_{10}). Sin embargo, las soluciones están muy alejadas del óptimo global. Los resultados indican que tanto la dominancia y jerarquización de Pareto y la división de la población en subpoblaciones permite manejar una diversidad suficiente para obtener resultados aceptables. La dominancia de Pareto como criterio de selección produce mejores resultados (en términos de optimalidad) que la jerarquización de Pareto o un mecanismo basado en subpoblaciones. Sin embargo, no puede alcanzar el óptimo global en problemas con alta dimensionalidad, zonas factibles grandes o muchas restricciones de igualdad no lineales. Los resultados globales del AG no generacional de COMOGA sugieren que este tipo de AG no es una buena opción para resolver problemas de optimización global no lineal. Esto es en gran medida debido a la alta presión de selección que origina convergencia prematura.

A pesar de que este estudio no es concluyente, parece indiciar que la dominancia de Pareto, la jerararquización de Pareto y los mecanismos basados en subpoblaciones son enfoques promisorios para el manejo de restricciones. HCNPGA (que utiliza la dominancia de Pareto como criterio de selección) parece ser el método más robusto de los cuatro que fueron comparados. Por otro lado, la jerarquización de Pareto en HCMOGA produjo los mejores resultados en problemas difíciles. HCVEGA fue el enfoque que mejores desviaciones estándar obtuvo. Finalmente, estos resultados también parecen indicar que el uso de un AG tradicional (generacional) se desempeña mejor en problemas de optimización con restricciones que su contraparte no generacional. Una pregunta abierta es si las ventajas de cada una de estas técnicas se pueden combinar en una sola propuesta.

5 Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo se presentó un estudio comparativo entre cuatro técnicas para manejo de restricciones en optimización global basadas en conceptos de optimización evolutiva multiobjetivo que fueron implementadas y evaluadas con trece funciones de prueba.

Nuestros resultados mostraron ciertos indicios del comportamiento de cada técnica. Sin embargo, no se realizaron comparaciones contra técnicas tradicionales para manejo de restricciones como las funciones de penalización [21, 24] o contra aquellas propuestas más competitivas como la Jerarquización Estocástica [22], los mapas Homomorfos [15] y ASCHEA [11].

Los resultados obtenidos indican que las técnicas basadas en conceptos de optimización evolutiva multiobjetivo pueden resolver problemas con un solo objetivo en espacios restringidos. Sin embargo se requiere de un mecanismo adicional para mejorar el desempeño de estos enfoques, ya que tienen obvios problemas para alcanzar el óptimo global en varias de las funciones de prueba utilizadas en este trabajo.

Agradecimientos

Este trabajo es representativo de la investigación realizada por el grupo de Computación Evolutiva del CINVESTAV-IPN (EVOCINV). El primer autor agradece el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) mediante una beca para cursar estudios de posgrado en el CINVESTAV-IPN. El segundo autor agradece el apoyo otorgado por CONACyT a través del proyecto número 32999-A. Ambos autores agradecen la valiosa ayuda del Dr. Patrick D. Surry.

Bibliografía

[1] Eduardo Camponogara and Sarosh N. Talukdar. A Genetic Algorithm for Constrained and Multiobjective Optimization. In Jarmo T. Alander, editor, *3rd Nordic Workshop on Genetic Algorithms and Their Applications (3NWGA)*, pages 49–62, Vaasa, Finland, August 1997. University of Vaasa.

[2] V. Chankong and Y.Y Haimes. Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology. In Andrew P. Sage, editor, *Systems Science and Engineering*. North-Holland, 1983.

[3] Carlos A. Coello Coello. Theoretical and Numerical Constraint Handling Techniques used with Evolutionary Algorithms: A Survey of the State of the Art. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(11-12):1245–1287, January 2002.

[4] Carlos A. Coello Coello and Efrén Mezura-Montes. Handling Constraints in Genetic Algorithms Using Dominance-Based Tournaments. In I.C. Parmee, editor, *Proceedings of the Fifth International Conference on Adaptive Computing Design and Manufacture (ACDM 2002)*, volume 5, pages 273–284, University of Exeter, Devon, UK, April 2002. Springer-Verlag.

[5] Carlos A. Coello Coello. Constraint-handling using an evolutionary multiobjective optimization technique. *Civil Engineering and Environmental Systems*, 17:319–346, 2000.

[6] Carlos A. Coello Coello. Treating Constraints as Objectives for Single-Objective Evolutionary Optimization. *Engineering Optimization*, 32(3):275–308, 2000.

[7] Carlos A. Coello Coello, David A. Van Veldhuizen, and Gary B. Lamont. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Kluwer Academic Publishers, New York, June 2002. ISBN 0-3064-6762-3.

[8] Carlos M. Fonseca and Peter J. Fleming. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization. In Stephanie Forrest, editor, *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, pages 416–423, San Mateo, California, 1993. University of Illinois at Urbana-Champaign, Morgan Kaufmann Publishers.

[9] David Goldberg. *The Design of Innovation*. Kluwer Academic Publishers, New York, June 2002. ISBN 1-4020-7098-5.

[10] David E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1989.

[11] Sana Ben Hamida and Marc Schoenauer. ASCHEA: New Results Using Adaptive Segregational Constraint Handling. In *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation 2002 (CEC'2002)*, volume 1, pages 884–889, Piscataway, New Jersey, May 2002. IEEE Service Center.

[12] Jeffrey Horn, Nicholas Nafpliotis, and David E. Goldberg. A Niched Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. In *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence*, volume 1, pages 82–87, Piscataway, New Jersey, June 1994. IEEE Service Center.

[13] F. Jiménez, A.F. Gómez-Skarmeta, and G. Sánchez. How Evolutionary Multi-objective Optimization can be used for Goals and Priorities based Optimization. In E. Alba, F. Fernández, J.A. Gómez, F. Herrera, J.I. Hidalgo, J. Lanchares, J.J. Merelo, and J.M. Sánchez, editors, *Primer Congreso Espaõl de Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados (AEB'02)*, pages 460–465, Mérida España, 2002. Universidad de la Extremadura, España.

[14] Fernando Jiménez and José L. Verdegay. Evolutionary techniques for constrained optimization problems. In Hans-Jürgen Zimmermann, editor, *7th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT'99)*, Aachen, Germany, 1999. Verlag Mainz. ISBN 3-89653-808-X.

[15] Slawomir Koziel and Zbigniew Michalewicz. Evolutionary Algorithms, Homomorphous Mappings, and Constrained Parameter Optimization. *Evolutionary Computation*, 7(1):19–44, 1999.

[16] Efrén Mezura-Montes and Carlos A. Coello Coello. A Numerical Comparison of some Multiobjective-Based Techniques to Handle Constraints in Genetic Algorithms. Technical Report EVOCINV-03-2002, Evolutionary Computation Group at CINVESTAV, Sección de Computación, Departamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN, México D.F., México, 2002. Available in

the Constraint Handling Techniques in Evolutionary Algorithms Repository at http://www.cs.cinvestav.mx/˜constraint/.

[17] Zbigniew Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag, third edition, 1996.

[18] Zbigniew Michalewicz and Marc Schoenauer. Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems. *Evolutionary Computation*, 4(1):1–32, 1996.

[19] Tapabrata Ray. Constraint Robust Optimal Design using a Multiobjective Evolutionary Algorithm. In *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation 2002 (CEC'2002)*, volume 1, pages 419–424, Piscataway, New Jersey, May 2002. IEEE Service Center.

[20] Tapabrata Ray, Tai Kang, and Seow Kian Chye. An Evolutionary Algorithm for Constrained Optimization. In Darrell Whitley, David Goldberg, Erick Cantú-Paz, Lee Spector, Ian Parmee, and Hans-Georg Beyer, editors, *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2000)*, pages 771–777, San Francisco, California, July 2000. Morgan Kaufmann.

[21] Jon T. Richardson, Mark R. Palmer, Gunar Liepins, and Mike Hilliard. Some Guidelines for Genetic Algorithms with Penalty Functions. In J. David Schaffer, editor, *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms (ICGA-89)*, pages 191–197, San Mateo, California, June 1989. George Mason University, Morgan Kaufmann Publishers.

[22] Thomas P. Runarsson and Xin Yao. Stochastic Ranking for Constrained Evolutionary Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 4(3):284–294, September 2000.

[23] J. David Schaffer. Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms. In *Genetic Algorithms and their Applications: Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, pages 93–100. Lawrence Erlbaum, 1985.

[24] Alice E. Smith and David W. Coit. Constraint Handling Techniques—Penalty Functions. In Thomas Bäck, David B. Fogel, and Zbigniew Michalewicz, editors, *Handbook of Evolutionary Computation*, chapter C 5.2. Oxford University Press and Institute of Physics Publishing, 1997.

[25] Patrick D. Surry and Nicholas J. Radcliffe. The COMOGA Method: Constrained Optimisation by Multiobjective Genetic Algorithms. *Control and Cybernetics*, 26(3):391–412, 1997.